ANALYSE GEOMETRIQUE - MAT6230, UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

PROFESSEUR: DMITRY FAIFMAN

0.1. Liste de sujets.

- Sujets d'analyse fonctionnelle et d'EDP : Espaces de Sobolev et de Hölder et théorèmes de plongement. Opérateurs différentiels elliptiques, l'alternative de Fredholm, la régularité elliptique, la parametrix, les principes du maximum, le point fixe de Schauder et le degré de Leray-Schauder, la méthode de continuité.
- Opérateur de Laplace-Beltrami, opérateur de Green, décomposition de Hodge, théorème spectral.
- Géométrie spectrale, théorème de Courant et formule asymptotique de Weyl.
- Théorèmes de Bochner.
- Courbures gaussiennes et scalaires prescrites, obstructions de Kazdan-Warner.
- Courbure moyenne constante, théorème de la bulle de savon d'Alexandrov.
- Equations de Monge-Ampère, problèmes d'existence de Minkowski et de Weyl.

Sujets supplémentaires (en fonction du temps disponible, ou éventuellement comme sujets de choix pour les présentations des étudiants)

(1) Rigidité des hypersurfaces convexes, théorème de Cohn-Vossen et rigidité dans le problème de Minkowski.
(2) Inégalité d'Alexandrov-Fenchel.
(3) Problème de Yamabe
(4) Immersions et plongements isométriques.

0.2. Préalables. Connaissance de l'analyse sur variétés lisses, de la géométrie différentielle (riemannienne) et des bases de l'analyse fonctionnelle. Une expérience préalable des équations différentielles (en particulier des équations aux dérivées partielles) serait utile. On va rappeler brièvement les notions nécessaires; Il peut s'avérer nécessaire de faire quelques lectures à la maison.

0.3. Évaluation. Il y aura des devoirs à faire à la maison, ainsi qu'un resumé ou une présentation en classe de un sujet choisi (en fonction du nombre de participants). La note finale sera le maximum entre 0,25xDevoirs+0,75xSujet et 0,5xDevoirs + 0,5xSujet.

0.4. **Horaires de consultation.** On va fixer 2 heures par semaine qui conviendront à tous les participants.

0.5. **Topics list.**

- Topics in functional analysis and PDEs: Sobolev and Hölder spaces and embedding theorems. Elliptic differential operators, the Fredholm alternative, elliptic regularity, parametrix, maximum principles, Schauder fixed point and Leray-Schauder degree, continuity method.
- Laplace-Beltrami operator, Green operator, Hodge decomposition, spectral theorem.
- Spectral geometry, Courant's theorem and Weyl's asymptotic formula.
- Bochner's vanishing theorems,
- Prescribed gaussian and scalar curvatures, Kazdan-Warner obstructions.
- Constant mean curvature, Alexandrov's soap bubble theorem.
- Monge-Ampere equations, Minkowski and Weyl's existence problems.

Extra topics (depending on time, or possibly as choice topics for student presentations)

(1) Rigidity of convex hypersurfaces, Cohn-Vossen's theorem and uniqueness in Minkowski's problem.
(2) Alexandrov-Fenchel's inequality.
(3) Yamabe problem
(4) Isometric immersions and embeddings.

0.6. **Prerequisites.** Acquaintance with analysis on manifold, differential (Riemannian) geometry, functional analysis are desirable. Previous exposure to differential equations (particulary, partial differential equations) would be useful. We will try to briefly recall the necessary notions; possibly some home reading would be required.

0.7. **Grades.** There will be a take-home assignment, as well as a topic essay or classroom presentation (depending on the number of participants). The final grade will be the maximum between 0.25xHomework+0.75xTopic and 0.5xHomework + 0.5xTopic.

0.8. **Office hours.** We will fix 2 hours per week convenient for all participants.

1. Literature

- Aubin, Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry.
- Spivak's A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, particularly volumes 4,5.
- Schoen-Yau, Lectures on Differential Geometry

- Levitin-Mangoubi-Polterovich, Topics in Spectral Geometry.
- Gilbarg-Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.
- Nirenberg, Topics in Nonlinear Functional Analysis
- Figalli, The Monge-Ampere Equation and its Applications.
- Kazdan, Prescribing the Curvature of a Riemannian Manifold.
- Besse, Einstein Manifolds.