# Plan de cours: MAT 6354, Topologie algébrique (Automne 2024)

- **Professeur :** Jake Levinson, AA-4163 (Pavillon André-Aisenstadt)
  **Disponibilité :** mardi 13h30 à 14h30, jeudi 13h-14h (à confirmer en début de session)
  Possibilité d'autres périodes de disponibilité sur rendez-vous.
  **Contact :** `jake.levinson@umontreal.ca`, 413-884-2169
- **Échéancier :**
  3 septembre – 5 décembre 2024 (période d'examens 10 – 23 décembre)
  Mardi 11h00 à 13h00
  Jeudi 10h30 à 12h30
  Pavillon André-Aisenstadt 4186
  (calendrier académique: `https://fas.umontreal.ca/public/FAS/fas/Documents/Calendrier/Calendrier_A24-H25.pdf`)
- **Manuels recommandés :**
  - Hatcher, Allen; *Algebraic topology.* Disponible en ligne: `https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf`
  - Weibel, Charles; *An introduction to homological algebra.* Disponible en ligne: `https://umontreal.on.worldcat.org/oclc/847527211`
  - Rotman, Joseph; *Introduction to algebraic topology.*
- **Devoir :** Sera placé sur la page StudiUM du cours.
- **Barème :** 5 devoirs (40%), examen intra (20%), examen final (30%), présentation finale 10%
- **Note final :** Combinaison de mesures absolues et de distribution.

**Contexte :** La topologie est la branche des mathématiques qui étudie les espaces topologiques et les applications continues. On cherche d'abord à comprendre les propriétés invariantes par les identifications continues (l'homéomorphisme) ou, plus généralement, par la déformation (la notion plus flexible d'*homotopie*). La première telle propriété était la caractéristique d'Euler $\chi$, découverte au 14e siècle et donnée, pour toute surface triangulée ou maillée, par la formule

$$\chi = \text{nombre de sommets} - \text{nombre d'arêtes} + \text{nombre de faces}.$$

Elle équivaut à 2 pout tout polyèdre convexe – en fait, pour toute surface ayant la topologie d'une sphère – indépendamment de la triangulation ou du maillage donné. Au 19e siècle ont été découverts une suite d'invariants plus précis, les nombres de Betti $\beta_i$, définis (informellement) par

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \text{nombre de composants connexes}, \\ \beta_1 &= \text{nombre de “trous” circulaires}, \\ \beta_2 &= \text{nombre de “vides”}, \end{aligned}$$

Ceux-ci ré-expriment la caractéristique d'Euler par la formule

$$\chi = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2,$$

ce qui explique l'indépendance de $\chi$ du choix de triangulation, celle-ci n'affectant aucunement le nombre de « trous », de « vides » ou de composants connexes de la surface.

Au 20e siècle, ces idées d'origine combinatoire ont finalement mené à la *topologie algébrique*, dans laquelle on associe à chaque espace une collection de structures algébriques – groupes, anneaux, modules ... – invariantes par l'homotopie, qui nous permettent de détecter, de décrire et de compter non seulement les « trous » de tout espace topologique, mais encore d'autres propriétés plus subtiles. Parmi les objets de base de la topologie algébrique moderne se trouvent le groupe fondamental, les groupes d'homotopie, l'homologie et la cohomologie (ces dernières sont des groupes abéliens ou des espaces vectoriels).

**Matière :**

- Rappel de la topologie générale et de l'algèbre
- Rappel (ou survol) du groupe fondamental et des revêtements
- Algèbre homologique : complexes, homologie, suites exactes courtes et longues
- Homologie simpliciale, singulière et cellulaire. Théorèmes d'excision et d'approximation simpliciale et cellulaire. Suite de de Mayer-Vietoris. Exemples de calculs et applications classiques (théorèmes de Brouwer et de Borsuk-Ulam). Formule de Künneth.
- Cohomologie. Théorème de Poincaré.

- (en fonction du temps disponible) Coefficients universels. Suites spectrales, théorème de Leray. Groupes d'homotopie (aspects de base).

NB: Les concepts d'algèbre homologique seront traités au fur et à mesure qu'ils apparaissent dans la matière topologique.

**Quelques rappels :**

- Date limite pour modifier un choix de cours et pour abandonner un cours sans frais: 18 septembre.
- Date limite pour abandonner un cours avec frais : 8 novembre.
- Pour la disponibilité des livres en bibliothèque, contacter le comptoir de prêt `http://www.bib.umontreal.ca/nous-joindre/MI.htm`.