

# MAT 6339A: La théorie K

Hiver 2020-2021, Université de Montréal

**Professeur:** Egor Shelukhin

**Coordonnées:** (bureau) 6163 Pav. Aisenstadt, egor.shelukhin@umontreal.ca,  
<https://umontreal.zoom.us/j/91217334163?pwd=dHZSYVNqOEhVMWhWT2ZrSWNkaUZ4UT09>  
(Meeting ID: 912 1733 4163, Passcode: 673159)  
Disponibilités sur rendez-vous; svp envoyez-moi un courriel si vous voulez discuter.

**Lieu du cours:**

<https://umontreal.zoom.us/j/91217334163?pwd=dHZSYVNqOEhVMWhWT2ZrSWNkaUZ4UT09>  
(Meeting ID: 912 1733 4163, Passcode: 673159)

lundi 10h30-12h30

mercredi 14h30-16h30

**Plan du cours:**

C'est un cours avancé des cycles supérieures en géométrie et topologie, axé sur certains aspects de la topologie algébrique et de l'analyse des variétés lisses. Ces deux principaux points culminants sont le problème des champs de vecteurs sur les sphères et le théorème d'indice d'Atiyah-Singer pour les opérateurs elliptiques sur les variétés.

Les deux sujets impliquent la notion de K-théorie topologique, qui est l'une des premières théories extraordinaires de cohomologie introduites après la cohomologie habituelle. Nous étudierons donc cette théorie de cohomologie; ses relations avec la cohomologie usuelle au moyen de classes caractéristiques; et des opérations cohomologiques sur les deux théories, notamment celles de Steenrod et de Adams.

Pour le théorème d'Atiyah-Singer, on aura besoin de notions d'opérateurs pseudo-différentiels et de la théorie de Fredholm, ainsi que d'éléments d'opérations fonctorielles en K-théorie.

Je projette que le programme contiendra les sujets suivants:

- Rappel sur les notions de homologie et cohomologie
- Fibrés vectoriels
- Opérations de Steenrod
- Problème des champs vectoriels indépendants sur les sphères
- Approche partielle classique
- L'anneau de Grothendieck  $K(X)$
- Propriétés de base

- Périodicité de Bott
- Isomorphisme de Thom
- Caractère de Chern
- Opérations extérieures
- Opérations de Adams
- Solution de Adams au problème des champs vectoriels
- Opérateurs elliptiques sur les variétés lisses
- Index analytique
- Index topologique
- Opérateurs pseudo-différentiels
- Le théorème de Atiyah-Singer
- Applications
- Sujets choisis comme: cas des variétés non-compactes (Atiyah-Patodi-Singer), flot spectral, index d'une famille d'opérateurs, cas  $G$ -equivariant, théorie K algébrique

**Préalables:** programme complet des cours de mathématiques de premier cycle, ou équivalent, comme:

algèbre: MAT2600, MAT2611, MAT1600, MAT 2300,  
 analyse, géométrie, équations différentielles: MAT 3162, MAT 2115, MAT 1000, MAT 2050, MAT 2100, MAT 2130  
 topologie (important!): MAT 3363, MAT 3300

(très souhaitable) connaissances des cours gradués de niveau d'entrée comme:

ÉDP: MAT 6220

algèbre commutative: MAT 6620

analyse fonctionnelle: MAT 6124

théorie de la mesure: MAT 6117

géométrie différentielle: MAT 6330

**Évaluation:** intra (30%) et final (70%). La note du cours sera la moyenne pondérée des notes. L'intra sera un examen maison. Le final sera probablement une présentation ou un essai.

**Quelques livres recommandés:**

- K-theory - M. Atiyah

- K-theory: an introduction - M. Karoubi
- Spin geometry - H. B. Lawson, M. L. Michelsohn
- Vector bundles and K-theory - A. Hatcher
- Elliptic operators, topology, and asymptotic methods - J. Roe
- Cohomology operations and applications in homotopy theory - R. E. Mosher, M. C. Tangora
- Homotopy theory of the vector field problem. (Course notes from MIT course) - H. Miller
- Articles originaux

**MAT 6339A: K-theory**  
Winter 2020-2021, Université de Montréal

**Professor:** Egor Shelukhin

**Coordinates:** (bureau) 6163 Pav. Aisenstadt, egor.shelukhin@umontreal.ca,  
<https://umontreal.zoom.us/j/91217334163?pwd=dHZSYVNqOEhVMWhWT2ZrSWNkaUZ4UT09>  
(Meeting ID: 912 1733 4163, Passcode: 673159)  
Office hours by appointment; please send me an email if you'd like to talk.

**Course location:**

<https://umontreal.zoom.us/j/91217334163?pwd=dHZSYVNqOEhVMWhWT2ZrSWNkaUZ4UT09>  
(Meeting ID: 912 1733 4163, Passcode: 673159)

Monday 10:30-12:30

Wednesday 14:30-16:30

**Course description:**

This is a graduate topics course in geometry and topology, focusing on certain aspects of algebraic topology and analysis on manifolds. The two main highlights are the problem of vector fields on spheres and the Atiyah-Singer index theorem for elliptic operators on manifolds.

Both subjects involve the notion of topological K-theory, which is one of the first extraordinary cohomology theories invented after usual cohomology. We shall therefore study this cohomology theory; its relations with usual cohomology by means of characteristic classes; and cohomological operations on both theories, notably those due to Steenrod and Adams.

For the Atiyah-Singer theorem, we shall require notions of pseudo-differential operators and Fredholm theory, as well as elements of functorial operations in K-theory.

I plan the program to contain the following subjects:

- Reminder about the notions of homology and cohomology
- Vector bundles
- Steenrod operations
- The problem of linearly independent vector fields on spheres
- A partial classical approach
- The Grothendieck ring  $K(X)$
- Basic properties
- Bott periodicity

- Thom isomorphism
- Chern character
- Exterior power operations
- Adams operations
- Adams' solution of the problem of vector fields on spheres
- Elliptic operators on smooth manifolds
- Analytic index
- Topological index
- Pseudo-differential operators
- Atiyah-Singer theorem
- Applications
- Additional subjects such as: case of non-compact manifolds (Atiyah-Patodi-Singer), spectral flow, index of a family of elliptic operators,  $G$ -equivariant case, algebraic K-theory

**Prerequisites:** complete undergraduate program of courses in pure mathematics, or equivalent, including:

algebra: MAT2600, MAT2611, MAT1600, MAT 2300,  
 analysis, geometry, differential equations: MAT 3162, MAT 2115, MAT 1000, MAT 2050, MAT 2100, MAT 2130  
 topology (important!): MAT 3363, MAT 3300

(very desirable) familiarity with entry level graduate courses like:

PDE: MAT 6220  
 commutative algebra: MAT 6620  
 functional analysis: MAT 6124  
 measure theory: MAT 6117  
 differential geometry: MAT 6330

**Evaluation:** midterm (30%) and final (70%). The grade will be the weighted average of grades. The midterm will be a take-home exam. The final exam will likely be a presentation or an essay.

**Some recommended literature:**

- K-theory - M. Atiyah
- K-theory: an introduction - M. Karoubi

- Spin geometry - H. B. Lawson, M. L. Michelsohn
- Vector bundles and K-theory - A. Hatcher
- Elliptic operators, topology, and asymptotic methods - J. Roe
- Cohomology operations and applications in homotopy theory - R. E. Mosher, M. C. Tangora
- Homotopy theory of the vector field problem. (Course notes from MIT course) - H. Miller
- Original articles