

PLAN DE COURS

MAT 2130 – ANALYSE A UNE VARIABLE COMPLEXE

Hiver 2021, Université de Montréal

Professeur François Lalonde, bureau AA-6143, lalonde@dms.umontreal.ca

INTRODUCTION

L'analyse complexe constitue l'une des plus belles, des plus profondes et des plus surprenantes découvertes de l'humanité. Elle remonte grosso modo au mathématicien suisse Leonard Euler au XVIII^{ème} siècle à qui l'on doit la célèbre formule $e^{i\pi} + 1 = 0$ qui rassemble d'un coup les cinq principales constantes mathématiques !

Cette théorie fut développée par les Ecoles française et allemande au XIX^{ème} siècle, qui ont révélé la sublime beauté, l'extraordinaire puissance calculatoire, et l'incroyable applicabilité de l'analyse complexe dans tous les domaines des sciences exactes. On peut dire, sans exagérer, que le XIX^{ème} siècle était tout entier tourné vers cette merveille, et que tout grand mathématicien n'avait à l'esprit que de sortir du monde des réels pour explorer ce nouvel objet. Aujourd'hui, l'analyse complexe à une ou plusieurs variables, et plus généralement les espaces courbes de dimension arbitraire construits sur les nombres complexes (qu'on appelle "variétés algébriques complexes") sont le *nec plus ultra* de la recherche contemporaine tant ils sont agiles à décrire les phénomènes mathématiques et physiques les plus subtils et les plus fondamentaux.

Pourquoi est-ce ainsi ? Pourquoi l'analyse complexe est-elle si puissante, si différente de l'analyse réelle habituelle ? Pour certains, les algébristes, ce sont les propriétés d'un corps algébriquement clos, c'est-à-dire les nombres complexes, muni de la topologie héritée des nombres réels, qui est optimal par rapport à ces propriétés, qui explique *in fine* cette magie. Pour les analystes, c'est plutôt le *bootstrapping*, commun à une large gamme de fonctions analytiques complexes généralisées, qui explique cette beauté car toute fonction une fois différentiable complexe est automatiquement infiniment différentiable en tant que fonction complexe (et donc en tant que fonction réelle) ! Enfin, pour les géomètres, ce qui distingue les fonctions réelles des fonctions complexes, c'est que les premières sont "souples", c'est-à-dire maniabiles, admettant des variations brusques de leur comportement dès qu'on le désire. Les fonctions réelles, même C^∞ , sont comme de la pâte à modeler: on peut faire presque tout ce que l'on veut avec elles. A l'opposé, les fonctions complexes sont si rigides que la connaissance d'une fonction complexe dans un ouvert non-vide aussi petit que l'on veut impose la détermination de la fonction partout ailleurs ! En fait, le domaine complexe est encore plus rigide puisque que la seule donnée du développement de Taylor en un seul point suffit à déterminer la fonction complexe partout ailleurs.

L'analyse des fonctions différentiables réelles et celle des fonctions différentiables complexes constituent donc deux mondes opposés. Ils entretiennent pourtant

des relations sur le plan formel puisque les définitions des principaux objets d'étude sont les mêmes dans les deux cas. Enfin, il est possible d'introduire une notion de fonction analytique (c'est à dire développable en série de puissances) réelle qui se comporte comme la partie réelle des fonctions complexes. Mais bien que la définition d'analyticité soit inhérente à l'analyse complexe, elle ne l'est pas en analyse réelle. C'est ce qui les distingue.

PLAN DE COURS

0. introduction

Les nombres complexes. La magie de l'analyse complexe: diff rentiability et analyticité. Les équations de Cauchy-Riemann. Une petite histoire de l'analyse complexe depuis le XVIIIème siècle. Ses applications contemporaines en mathématiques et en physique.

1. **Séries entières et fonctions analytiques**
2. **Fonctions holomorphes**
3. **Intégrales curvilignes**
4. **Points singuliers, séries de Laurent et fonctions méromorphes**
5. **Le théorème des résidus**
6. **Exemples de fonctions holomorphes et méromorphes**
7. **Applications des fonctions holomorphes**

REFERENCES

Michèle Audin, *Analyse complexe*, pdf en accès libre sur le site de l'auteur (principale référence du cours)

<http://www-irma.u-strasbg.fr/maudin/analysecomp.pdf>

Henri Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Enseignement des sciences, Hermann, Paris. 1961.

Ruel V. Churchill, *Complex variables and applications*, McGraw-Hill, 1960 (ou l'une des multiples  ditions postérieures).

EVALUATION

Je vous propose quatre quiz à 5 points chacun pour un total de 20 % de la note finale, 30 % pour l'intra et 50 % pour l'examen final.

DISPONIBILITE

Je suis disponible en tout temps: il suffit de m'écrire à mon adresse lalonde@dms.umontreal.ca et je vous répondrai en 24 heures (ou moins) pour fixer un rv pour le jour même ou le lendemain, par zoom.