

**MAT 3431**  
*Introduction à la théorie de l'optimisation*

**Département de mathématiques et de statistique**

---

**PROGRAMME ET PLAN DU COURS**

Il correspond à la table des matières du livre sauf les paragraphes précédés d'un triangle noir.

---

**MANUEL DE COURS (OBLIGATOIRE)**

M. Delfour, Introduction à l'optimisation et au calcul semi-différentiel, Dunod 2012  
- disponible à la Librairie de l'Université de Montréal

---

# Table des matières

<b>Préface</b>	<b>xi</b>
Un vaste et magnifique sujet . . . . .	xi
Audience visée et objectifs du livre . . . . .	xii
Systèmes de numérotage et de référence . . . . .	xiii
Remerciements . . . . .	xiv
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1 Minima et maxima . . . . .	1
2 Le calcul des variations et ses rejetons . . . . .	2
3 Contenu du livre . . . . .	3
4 Quelques révisions d'analyse classique . . . . .	5
4.1 Plus petite borne supérieure et plus grande borne inférieure . . . . .	5
4.2 Espace euclidien . . . . .	6
4.2.1 Produit cartésien, boules, et continuité . . . . .	6
4.2.2 Ensembles ouverts, fermés ou compacts . . . . .	7
4.3 Fonctions . . . . .	10
4.3.1 Définitions et convention . . . . .	10
4.3.2 Continuité d'une fonction . . . . .	10
<b>2 Existence, convexités et convexification</b>	<b>13</b>
1 Introduction . . . . .	13
2 Théorème d'existence de Weierstrass . . . . .	14
3 Extrema des fonctions à valeurs réelles étendues . . . . .	14
4 Semi-continuités inférieure et supérieure . . . . .	18
5 Existence de points minimisants dans $U$ . . . . .	24
5.1 $U$ compact . . . . .	24
5.2 $U$ fermé mais pas nécessairement borné . . . . .	27
5.3 Condition de croissance à l'infini . . . . .	29
5.4 Quelques propriétés de l'ensemble des points minimisants . . . . .	32
6 ► Principe variationnel d'Ekeland . . . . .	33
7 Convexité, quasi-convexité, convexité stricte et unicité . . . . .	36
7.1 Convexité et concavité . . . . .	36
7.2 Quasi-convexité . . . . .	43
7.3 Convexité stricte et unicité . . . . .	44

8	Sous-espaces linéaire et affine et intérieur relatif . . . . .	47
8.1	Définitions . . . . .	47
8.2	Domaine des fonctions convexes . . . . .	49
9	Convexification et transformée de Fenchel–Legendre . . . . .	50
9.1	Fonctions convexes sci comme enveloppe supérieure de fonctions affines . . . . .	50
9.2	Transformée de Fenchel–Legendre . . . . .	56
9.3	Convexification sci et bi-transformée de Fenchel–Legendre . . . . .	59
9.4	Infima de la fonction objectif et de sa convexifiée sci . . . . .	63
9.5	Problèmes primal et dual et théorème de dualité de Fenchel . . . . .	64
10	Exercices . . . . .	68
<b>3</b>	<b>Semi-différentiabilité, différentiabilité, continuité et convexités</b>	<b>71</b>
1	Introduction . . . . .	71
2	Fonctions numériques d’une variable réelle . . . . .	74
2.1	Continuité et différentiabilité . . . . .	76
2.2	Théorème de la moyenne . . . . .	77
2.3	Propriété de la dérivée d’une fonction dérivable partout . . . . .	79
2.4	Théorème de Taylor . . . . .	80
3	Fonctions numériques de plusieurs variables réelles . . . . .	81
3.1	L’approche géométrique par la différentielle . . . . .	81
3.2	Semi-différentielles, différentielles, gradient, et dérivées partielles . . . . .	84
3.2.1	Définitions . . . . .	84
3.2.2	Exemples et contre-exemples . . . . .	88
3.2.3	Gradient . . . . .	93
3.2.4	Différentielle de Fréchet . . . . .	94
3.3	Différentielle et semi-différentielle de Hadamard . . . . .	97
3.4	Opérations sur les fonctions semi-différentiables . . . . .	102
3.4.1	Opérations algébriques, enveloppes inférieure et supérieure . . . . .	102
3.4.2	Règle de dérivation en chaîne des fonctions composées . . . . .	104
3.5	Fonctions lipschitziennes . . . . .	109
3.5.1	Définitions et leur semi-différentielle de Hadamard . . . . .	109
3.5.2	► Semi-différentielles supérieure et inférieure de Dini et de Hadamard . . . . .	111
3.5.3	► Semi-différentielles supérieure et inférieure au sens de Clarke . . . . .	112
3.5.4	► Propriétés des semi-différentielles supérieures et inférieures . . . . .	114
3.6	Continuité, semi-différentielle de Hadamard, et différentielle de Fréchet . . . . .	118
3.7	Théorème de la moyenne pour les fonctions de plusieurs variables . . . . .	119
3.8	Fonctions de classes $C^{(0)}$ et $C^{(1)}$ . . . . .	120
3.9	Fonctions de classe $C^{(p)}$ et matrice hessienne . . . . .	124

4	Fonctions convexes et semiconvexes . . . . .	127
4.1	Fonctions convexes directionnellement dérivables . . . . .	127
4.2	► Semi-différentiabilité et continuité d'une fonction convexe . . . . .	130
4.2.1	Convexité et semi-différentiabilité . . . . .	131
4.2.2	Convexité et continuité . . . . .	134
4.3	► Semi-différentielle d'Hadamard inférieure en un point frontière du domaine . . . . .	139
4.4	► Fonctions semi-convexes et Hadamard semi-différentiabilité . . . . .	141
5	► Semi-différentielle d'un extremum paramétrisé . . . . .	148
5.1	Semi-différentielle d'un infimum par rapport à un paramètre . . . . .	149
5.2	Infimum d'une fonction quadratique paramétrisée . . . . .	152
6	Résumé de la semi-différentiabilité et de la différentiabilité . . . . .	158
7	Exercices . . . . .	160
<b>4</b>	<b>Conditions d'optimalité</b> . . . . .	<b>163</b>
1	Introduction . . . . .	163
2	Optimisation différentiable sans contraintes . . . . .	164
2.1	Quelques résultats de base et exemples . . . . .	165
2.2	Plus petite et plus grande valeurs propres . . . . .	175
2.3	► Hadamard semi-différentielle de la plus petite valeur propre . . . . .	177
3	Conditions d'optimalité pour un convexe $U$ . . . . .	179
3.1	Cônes . . . . .	179
3.2	Fonction objectif convexe Gateaux différentiable . . . . .	181
3.3	Fonction objectif semi-différentiable . . . . .	188
3.4	► Fonction objectif convexe arbitraire . . . . .	190
4	Directions admissibles et cônes tangents à $U$ . . . . .	192
4.1	Ensemble des directions admissibles ou des demi-tangentes . . . . .	192
4.2	Propriétés des cônes tangents $T_U(x)$ et $S_U(x)$ . . . . .	195
4.3	► Cône tangent de Clarke et autres cônes tangents . . . . .	199
5	Orthogonalité, transposition et cônes duaux . . . . .	202
5.1	Orthogonalité et transposition . . . . .	202
5.2	Cônes duaux . . . . .	205
6	Conditions nécessaires d'optimalité pour $U$ arbitraire . . . . .	210
6.1	Condition nécessaire d'optimalité . . . . .	210
6.1.1	Fonction objectif Hadamard semi-différentiable . . . . .	210
6.1.2	► Fonction objectif arbitraire . . . . .	211
6.2	Condition nécessaire duale d'optimalité . . . . .	213
7	Contraintes d'égalité et d'inégalité affines . . . . .	215
7.1	Caractérisation de $T_U(x)$ . . . . .	215
7.2	Cônes duaux pour contraintes linéaires . . . . .	216
7.3	Optimisation linéaire . . . . .	221
7.4	Quelques éléments de jeux de somme nulle. . . . .	228
7.5	Problèmes primal et dual de Fenchel et lagrangien . . . . .	232
7.6	Optimisation quadratique . . . . .	234
7.7	Fonction objectif Fréchet différentiable . . . . .	241
7.8	Fonction objectif quadratique non convexe . . . . .	241

7.9	Lemme de Farkas et sa généralisation . . . . .	243
8	► Aperçu de l'optimalité via les sous-différentielles . . . . .	244
9	Exercices . . . . .	246
<b>5</b>	<b>Optimisation différentiable avec contraintes</b>	<b>249</b>
1	Problèmes avec contraintes . . . . .	249
2	Contraintes d'égalité : Théorème des multiplicateurs de Lagrange . .	250
2.1	Cône tangent des directions admissibles . . . . .	250
2.2	Matrice jacobienne et théorème de la fonction implicite . . .	251
2.3	Théorème des multiplicateurs de Lagrange . . . . .	253
3	Contraintes d'inégalité : Théorème de Karush–Kuhn–Tucker . . . . .	264
4	Contraintes d'égalité et d'inégalité simultanées . . . . .	279
5	Exercices . . . . .	296
	<b>Annexe A. Fonction inverse et fonction implicite</b>	<b>301</b>
1	Théorème de la fonction inverse . . . . .	301
2	Théorème de la fonction implicite . . . . .	302
	<b>Annexe B. Corrigés des exercices</b>	<b>304</b>
1	Exercices du Chapitre 2 . . . . .	304
2	Exercices du Chapitre 3 . . . . .	315
3	Exercices du Chapitre 4 . . . . .	321
4	Exercices du Chapitre 5 . . . . .	331
	<b>Éléments de bibliographie</b>	<b>341</b>
	<b>Index des notations</b>	<b>350</b>
	<b>Index</b>	<b>352</b>