

MAT 3431
Introduction à la théorie de l'optimisation

Département de mathématiques et de statistique

PROGRAMME ET PLAN DU COURS

Il correspond à la table des matières du livre sauf les paragraphes précédés d'un triangle noir.

MANUEL DE COURS (OBLIGATOIRE)

M. Delfour, Introduction à l'optimisation et au calcul semi-différentiel, Dunod 2012
- disponible à la Librairie de l'Université de Montréal

Table des matières

Préface	xi
Un vaste et magnifique sujet	xi
Audience visée et objectifs du livre	xii
Systèmes de numérotage et de référence	xiii
Remerciements	xiv
1 Introduction	1
1 Minima et maxima	1
2 Le calcul des variations et ses rejets	2
3 Contenu du livre	3
4 Quelques révisions d'analyse classique	5
4.1 Plus petite borne supérieure et plus grande borne inférieure	5
4.2 Espace euclidien	6
4.2.1 Produit cartésien, boules, et continuité	6
4.2.2 Ensembles ouverts, fermés ou compacts	7
4.3 Fonctions	10
4.3.1 Définitions et convention	10
4.3.2 Continuité d'une fonction	10
2 Existence, convexités et convexification	13
1 Introduction	13
2 Théorème d'existence de Weierstrass	14
3 Extrema des fonctions à valeurs réelles étendues	14
4 Semi-continuités inférieure et supérieure	18
5 Existence de points minimisants dans U	24
5.1 U compact	24
5.2 U fermé mais pas nécessairement borné	27
5.3 Condition de croissance à l'infini	29
5.4 Quelques propriétés de l'ensemble des points minimisants	32
6 ► Principe variationnel d'Ekeland	33
7 Convexité, quasi-convexité, convexité stricte et unicité	36
7.1 Convexité et concavité	36
7.2 Quasi-convexité	43
7.3 Convexité stricte et unicité	44

8	Sous-espaces linéaire et affine et intérieur relatif	47
8.1	Définitions	47
8.2	Domaine des fonctions convexes	49
9	Convexification et transformée de Fenchel–Legendre	50
9.1	Fonctions convexes sci comme enveloppe supérieure de fonctions affines	50
9.2	Transformée de Fenchel–Legendre	56
9.3	Convexification sci et bi-transformée de Fenchel–Legendre	59
9.4	Infima de la fonction objectif et de sa convexifiée sci	63
9.5	Problèmes primal et dual et théorème de dualité de Fenchel	64
10	Exercices	68
3	Semi-différentiabilité, différentiabilité, continuité et convexités	71
1	Introduction	71
2	Fonctions numériques d’une variable réelle	74
2.1	Continuité et différentiabilité	76
2.2	Théorème de la moyenne	77
2.3	Propriété de la dérivée d’une fonction dérivable partout	79
2.4	Théorème de Taylor	80
3	Fonctions numériques de plusieurs variables réelles	81
3.1	L’approche géométrique par la différentielle	81
3.2	Semi-différentielles, différentielles, gradient, et dérivées partielles	84
3.2.1	Définitions	84
3.2.2	Exemples et contre-exemples	88
3.2.3	Gradient	93
3.2.4	Différentielle de Fréchet	94
3.3	Différentielle et semi-différentielle de Hadamard	97
3.4	Opérations sur les fonctions semi-différentiables	102
3.4.1	Opérations algébriques, enveloppes inférieure et supérieure	102
3.4.2	Règle de dérivation en chaîne des fonctions composées	104
3.5	Fonctions lipschitziennes	109
3.5.1	Définitions et leur semi-différentielle de Hadamard	109
3.5.2	► Semi-différentielles supérieure et inférieure de Dini et de Hadamard	111
3.5.3	► Semi-différentielles supérieure et inférieure au sens de Clarke	112
3.5.4	► Propriétés des semi-différentielles supérieures et inférieures	114
3.6	Continuité, semi-différentielle de Hadamard, et différentielle de Fréchet	118
3.7	Théorème de la moyenne pour les fonctions de plusieurs variables	119
3.8	Fonctions de classes $C^{(0)}$ et $C^{(1)}$	120
3.9	Fonctions de classe $C^{(p)}$ et matrice hessienne	124

4	Fonctions convexes et semiconvexes	127
4.1	Fonctions convexes directionnellement dérivables	127
4.2	► Semi-différentiabilité et continuité d'une fonction convexe	130
4.2.1	Convexité et semi-différentiabilité	131
4.2.2	Convexité et continuité	134
4.3	► Semi-différentielle d'Hadamard inférieure en un point frontière du domaine	139
4.4	► Fonctions semi-convexes et Hadamard semi-différentiabilité	141
5	► Semi-différentielle d'un extremum paramétrisé	148
5.1	Semi-différentielle d'un infimum par rapport à un paramètre	149
5.2	Infimum d'une fonction quadratique paramétrisée	152
6	Résumé de la semi-différentiabilité et de la différentiabilité	158
7	Exercices	160
4	Conditions d'optimalité	163
1	Introduction	163
2	Optimisation différentiable sans contraintes	164
2.1	Quelques résultats de base et exemples	165
2.2	Plus petite et plus grande valeurs propres	175
2.3	► Hadamard semi-différentielle de la plus petite valeur propre	177
3	Conditions d'optimalité pour un convexe U	179
3.1	Cônes	179
3.2	Fonction objectif convexe Gateaux différentiable	181
3.3	Fonction objectif semi-différentiable	188
3.4	► Fonction objectif convexe arbitraire	190
4	Directions admissibles et cônes tangents à U	192
4.1	Ensemble des directions admissibles ou des demi-tangentes	192
4.2	Propriétés des cônes tangents $T_U(x)$ et $S_U(x)$	195
4.3	► Cône tangent de Clarke et autres cônes tangents	199
5	Orthogonalité, transposition et cônes duaux	202
5.1	Orthogonalité et transposition	202
5.2	Cônes duaux	205
6	Conditions nécessaires d'optimalité pour U arbitraire	210
6.1	Condition nécessaire d'optimalité	210
6.1.1	Fonction objectif Hadamard semi-différentiable	210
6.1.2	► Fonction objectif arbitraire	211
6.2	Condition nécessaire duale d'optimalité	213
7	Contraintes d'égalité et d'inégalité affines	215
7.1	Caractérisation de $T_U(x)$	215
7.2	Cônes duaux pour contraintes linéaires	216
7.3	Optimisation linéaire	221
7.4	Quelques éléments de jeux de somme nulle.	228
7.5	Problèmes primal et dual de Fenchel et lagrangien	232
7.6	Optimisation quadratique	234
7.7	Fonction objectif Fréchet différentiable	241
7.8	Fonction objectif quadratique non convexe	241

7.9	Lemme de Farkas et sa généralisation	243
8	► Aperçu de l'optimalité via les sous-différentielles	244
9	Exercices	246
5	Optimisation différentiable avec contraintes	249
1	Problèmes avec contraintes	249
2	Contraintes d'égalité : Théorème des multiplicateurs de Lagrange . .	250
2.1	Cône tangent des directions admissibles	250
2.2	Matrice jacobienne et théorème de la fonction implicite . . .	251
2.3	Théorème des multiplicateurs de Lagrange	253
3	Contraintes d'inégalité : Théorème de Karush–Kuhn–Tucker	264
4	Contraintes d'égalité et d'inégalité simultanées	279
5	Exercices	296
	Annexe A. Fonction inverse et fonction implicite	301
1	Théorème de la fonction inverse	301
2	Théorème de la fonction implicite	302
	Annexe B. Corrigés des exercices	304
1	Exercices du Chapitre 2	304
2	Exercices du Chapitre 3	315
3	Exercices du Chapitre 4	321
4	Exercices du Chapitre 5	331
	Éléments de bibliographie	341
	Index des notations	350
	Index	352