La théorie de la représentation des groupes finis dans le langage des catégories

> Par ma foi, il y a plus de quarante ans que je dis de la prose, sans que j'en susse rien, et je vous suis le plus obligé du monde de m'avoir appris cela.
>
> *Le bourgeois gentilhomme*, Molière

1 Une courte introduction

Plusieurs des concepts étudiés dans le cours de théorie de la représentation sont des exemples d'outils introduits dans la théorie des catégories. Le texte qui suit introduit les définitions de base de la théorie des catégories et en donne des exemples à l'aide des définitions et résultats du cours.

2 Catégories

Définition 2.1. Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est définie par la donnée

(i) d'une famille d'objets notée $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;

(ii) pour chaque paire X et Y d'objets, d'un ensemble noté $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ dont les éléments sont appelés des morphismes de X vers Y, tel que, si $(X, Y) \neq (X', Y')$, alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y') = \emptyset$;

(iii) pour chaque triplet X, Y et Z d'objets, une fonction

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

(où l'image de la paire $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ est notée $g \circ f$) appelée la composition de morphismes et qui doit satisfaire aux deux axiomes suivants :

(C1 : associativité de $\circ$) si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ et $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, U)$, alors $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ et

(C2 : existence de l'identité) pour chaque objet $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, il existe un morphisme noté $1_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ tel que $g \circ 1_X = g$ et $1_X \circ h = h$ pour tout $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ et $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X)$.

Exemple 2.1. (a) L'ensemble des groupes finis sur lesquels le cours a porté est un exemple de catégorie, notée $\mathcal{G}$. La famille d'objets $\mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ est alors la famille des groupes finis et, pour H et $G \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$, l'ensemble des morphismes $\mathrm{Hom}(G, H)$ contiendra les morphismes de groupes de G vers H. La fonction $\circ$ sera la composition de morphismes de groupes qui est associative. Enfin, quel que soit le groupe $G \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$, l'ensemble $\mathrm{Hom}(G, G)$ contient toujours le morphisme identité qui satisfait l'axiome (C2).

(b) L'ensemble des groupes finis abéliens mène également à une catégorie, notée $\mathcal{A}$. Les objets sont alors les groupes finis abéliens, les morphismes sont ceux entre groupes abéliens. Enfin la composition et le morphisme identité sont comme pour la catégorie $\mathcal{G}$.

(c) Soit $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ la catégorie dont les objets sont les espaces vectoriels sur le corps des complexes $\mathbb{C}$. Les morphismes $\mathrm{Hom}(U, V)$ de U vers V seront les transformations linéaires avec $\circ$ la composition usuelle des transformations linéaires. La transformation identité est évidemment l'élément 1_U de $\mathrm{Hom}(U, U)$.

(d) Curieusement, il est possible de définir une catégorie fort semblable à la catégorie des espaces vectoriels $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$, mais dont les objects ne sont que des entiers. La famille des objets de la catégorie $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ est l'ensemble $\mathbb{N}_{\geq 0}$ des entiers non-négatifs. Pour chaque paire d'entiers $m, n \geq 0$, l'ensemble des morphismes $\mathrm{Hom}(m, n)$ a comme éléments les matrices $n \times m$ à coefficients complexes. La composition est alors la multiplication matricielle. La vérification du reste de la définition est facile.

Exercice 1. Soit G un groupe fini. Définir une catégorie $\mathrm{Mod}\, G$ dont les objets sont les $\mathbb{C}G$-modules de dimension finie. Vérifier que tous les axiomes sont satisfaits.

Exercice 2. Vérifier qu'un groupe $G = (G, \star)$ (où « $\star$ » dénote la loi de groupe de G) peut aussi être vu comme une catégorie avec les données suivantes. La catégorie a un seul objet « $\cdot$ », le seul ensemble de morphismes $\mathrm{Hom}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ contient les éléments de G et la composition $\circ$ est la loi produit du groupe. Ainsi, pour $g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$, $g_2 \circ g_1 = g_2 \star g_1 \in \mathrm{Hom}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$.

3 Foncteurs

Définition 3.1. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un *foncteur covariant* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est défini par la donnée pour chaque objet $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ d'un objet $F(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ et, pour chaque morphisme $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ de $\mathcal{C}$ d'un morphisme $F(f) : F(X) \to F(Y)$ de $\mathcal{D}$ tel que

(F1 : composition de morphismes) si $g \circ_{\mathcal{C}} f$ est défini dans $\mathcal{C}$, alors $F(g) \circ_{\mathcal{D}} F(g)$ l'est dans $\mathcal{D}$ et $F(g \circ_{\mathcal{C}} f) = F(g) \circ_{\mathcal{D}} F(f)$;

(F2 : identité sur identité) pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

Un *foncteur contravariant* est défini similairement, mais il inverse l'« orientation des flèches ». Plus précisément, un foncteur contravariant $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ transforme un morphisme $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ en un morphisme $F(f) \in \mathrm{Hom}(F(Y), F(X))$ et la composition de deux morphismes de $\mathcal{C}$ est liée à son image par F par $F(g \circ_{\mathcal{C}} f) = F(f) \circ_{\mathcal{D}} F(g)$.

On notera que la première partie de la définition de foncteur donne une application $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$. Ce qui fait la richesse de la définition de foncteur est qu'elle impose que les morphismes entre objets soient aussi préservés par cette application. Ainsi reconnaître un foncteur dans une théorie mathématique est plus riche que simplement construire une application entre deux ensembles d'objets.

Curieusement le cours de théorie de la représentation a défini un nombre important de foncteurs. Notre premier exemple de foncteur covariant est la restriction. Soit $H \subset G$ un sous-groupe du groupe G. Le foncteur restriction, noté $\downarrow$ (sans le H comme dans $\downarrow H$), est entre les catégories de modules finis de ces deux groupes :

$$\downarrow : \mathrm{Mod}\, G \to \mathrm{Mod}\, H$$

qui prend l'objet $U \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Mod}\, G)$ et lui fait correspondre le $\mathbb{C}H$-module $U \downarrow H \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Mod}\, H)$. Nous n'avons pas explicitement montré, dans le cours, comment $\downarrow$ agit sur les éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U, V)$ où $U, V \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Mod}\, G)$. Mais, comme souvent, il est facile de deviner la « bonne » définition de l'action d'un foncteur sur les morphismes. Soit $\theta : U \to V$ un morphisme entre $\mathbb{C}G$-modules. La définition de $(\theta\downarrow) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(U \downarrow H, V \downarrow H)$ sera simplement $(\theta\downarrow)(u) = \theta(u)$ pour $u \in U \downarrow H$. (Il faut se rappeler que, comme espaces vectoriels, U et $U \downarrow H$ coïncident.) Alors $(\theta\downarrow)$ est bien un morphisme de $\mathbb{C}H$-modules, car

$$h((\theta\downarrow)(u)) = h\theta(u) = \theta(hu) = \theta\downarrow(hu)$$

puisque θ est un $\mathbb{C}G$-morphisme et que $h \in H \subset G$. La définition de l'action de $\downarrow$ sur les morphismes satisfait les axiomes (C1) et (C2). Tout d'abord, si $\theta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U, V)$ et $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$, alors

$$(\psi\downarrow) \circ (\theta\downarrow)(u) = (\psi\downarrow)(\theta(u)) = \psi(\theta(u)) = (\psi \circ \theta)(u) = ((\psi \circ \theta)\downarrow)(u)$$

qui est (C1) et, pour $1_U \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U,U)$:

$$1_U \downarrow (u) = 1_U(u) = u, \qquad \forall u \in U$$

et donc $1_U \downarrow = 1_{U\downarrow}$ qui est (C2).

Le second exemple de foncteur covariant est celui qui consiste à associer à un module V son espace vectoriel de morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U,V)$ de U vers V, où U est un $\mathbb{C}G$-module fixé. Ainsi

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U,-) : \mathrm{Mod}\, G \to \mathcal{V}.$$

À nouveau, il faudra compléter la définition de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U,-)$ en donnant son action sur les morphismes. Le cas présent est plus délicat que le foncteur $\downarrow$. Soient V et W deux $\mathbb{C}G$-modules $\in \mathrm{Ob}(\mathrm{Mod}\, G)$. Leur image par le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U,-)$ est les deux espaces vectoriels $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U,V)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U,W)$ et donc l'application du foncteur sur un morphisme doit donner une transformation linéaire entre ces deux espaces vectoriels. Si $\theta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V,W)$, alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U,\theta) : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U,V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U,W)$$

doit être une transformation linéaire. Elle prendra un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U,V)$, par exemple le morphisme $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U,V)$, et en fera un morphisme $\mathrm{Hom}(U,\theta)(\psi)$ qui sera élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U,W)$. La suite de morphismes

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\psi"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{Hom}(U,\theta)(\psi) = \theta\circ\psi"'] & V \arrow[r, "\theta"] & W \end{tikzcd}$$

rend clair le choix à faire : $\mathrm{Hom}(U,\theta)(\psi) = \theta \circ \psi$. Si η est un troisième morphisme $\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(W,Z)$, alors les transformations linéaires $\mathrm{Hom}(U,\theta)$ et $\mathrm{Hom}(U,\eta)$ agissent entre les espaces vectoriels comme

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U,V) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(U,\theta)} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U,W) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(U,\eta)} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U,Z)$$

et, si à nouveau $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U,V)$, alors ces transformations linéaires agissent comme

$$\psi \xmapsto{\mathrm{Hom}(U,\theta)} \theta\circ\psi \xmapsto{\mathrm{Hom}(U,\eta)} \eta\circ(\theta\circ\psi)$$

et on a bien

$$\mathrm{Hom}(U,\eta)(\mathrm{Hom}(U,\theta)(\psi)) = \mathrm{Hom}(U,\eta)(\theta\circ\psi) = \eta\circ(\theta\circ\psi) = (\eta\circ\theta)\circ\psi = \mathrm{Hom}(U,\eta\circ\theta)(\psi)$$

c'est-à-dire $\mathrm{Hom}(U,\eta)\circ\mathrm{Hom}(U,\theta) = \mathrm{Hom}(U,\eta\circ\theta)$ qui est l'axiome (C1) pour un foncteur covariant. L'axiome (C2) est aisément vérifié :

$$\mathrm{Hom}(U,1_V)(\psi) = 1_V \circ \psi = \psi, \qquad \text{pour tout } \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U,V)$$

et $\mathrm{Hom}(U,1_V) = 1_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U,V)}$ comme il se doit.

Exercice 3. Tout d'abord un exercice sur les groupes eux-mêmes. Soit l'application $Ab : \mathrm{Ob}(\mathcal{G}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ entre les groupes finis et les groupes finis abéliens donné par $Ab(G) = G/G'$ où G' est le groupe dérivé de G. On sait que le quotient G/G' est abélien et, comme il se doit, $Ab(G)$ est donc dans $\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Soit $f \in \mathrm{Hom}(G,H)$ où G et H sont deux groupes quelconques. Définir $Ab(f) \in \mathrm{Hom}(G/G', H/H')$ tel que Ab soit un foncteur covariant.

Exercice 4. Soit U un $\mathbb{C}G$-module fixé. Construire un foncteur $\mathrm{Hom}(-,U) : \mathrm{Mod}\, G \to \mathcal{V}$ qui, sur un module fini V de G, agit comme $V \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V,U)$. Ce foncteur est-il covariant ou contravariant ?

Exercice 5. Soient $H \subset G$ un sous-groupe de G et soit $\uparrow$ l'application $\uparrow : \mathrm{Mod}\, H \to \mathrm{Mod}\, G$ donnée sur les objets par $U \mapsto U \uparrow G$. Montrer qu'il est possible d'étendre cette définition aux morphismes entre $\mathbb{C}G$-modules de façon à ce que $\uparrow$ soit un foncteur. Ce foncteur est-il covariant ou contravariant ?

4 Transformations naturelles

Dans son livre sur les catégories, Mac Lane affirme qu'avec Eilenberg il a défini les catégories dans le but de définir les foncteurs, et qu'il a défini les foncteurs dans le but de définir les transformations naturelles.

Définition 4.1. Soient $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs covariants de la catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie $\mathcal{D}$. Une *transformation naturelle* (ou *morphisme fonctoriel*) $\phi : F \to G$ est la donnée pour chaque objet $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ d'un morphisme $\phi_X : F(X) \to G(X)$ de $\mathcal{D}$ tel que, si $f : X \to Y$ est un morphisme de $\mathcal{C}$, alors $\phi_Y \circ F(f) = G(f) \circ \phi_X$, c'est-à-dire le diagramme suivant commute pour tous les objets X et Y de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\phi_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\phi_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Une définition semblable existe pour les foncteurs contravariants.

Une transformation naturelle lie les foncteurs covariants $\mathrm{Hom}(U, -)$ introduits à la section précédente. En fait, pour tout morphisme de $\mathbb{C}G$-modules $\theta : V \to U$, il est possible de définir une transformation naturelle $\hat\theta : \mathrm{Hom}(U, -) \to \mathrm{Hom}(V, -)$. Soit W, Z deux autres $\mathbb{C}G$-modules et $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(W, Z)$. Alors les F, G, X et Y de la définition sont $F = \mathrm{Hom}(U, -)$, $G = \mathrm{Hom}(V, -)$, $X = W$ et $Y = Z$. Une transformation naturelle $\hat\theta$ devra donc permettre de définir des morphismes

$$\hat\theta_W : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W) \quad \text{et} \quad \hat\theta_Z : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, Z)$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U, W) \arrow[r, "\hat\theta_W"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(U,\psi)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(V,\psi)"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U, Z) \arrow[r, "\hat\theta_Z"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, Z) \end{tikzcd} \tag{$\square$}$$

commute pour tout morphisme $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(W, Z)$. La transformation linéaire $\hat\theta_W : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ est simplement la composition d'un morphisme $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U, W)$ par la droite par θ. Ainsi $\hat\theta_W(\eta) = \eta \circ \theta$ qui est bien défini comme la suite de morphisme suivant le montre : $V \xrightarrow{\theta} U \xrightarrow{\eta} W$. La transformation linéaire $\mathrm{Hom}(U, \psi)$ a été construite à la section précédente : il s'agit de la composition par la gauche par ψ. Donc, pour tout $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U, W)$, on a que

$$\hat\theta_Z \circ \mathrm{Hom}(U, \psi)(\eta) = (\psi \circ \eta) \circ \theta$$

alors que

$$\mathrm{Hom}(V, \psi) \circ \hat\theta_W(\eta) = \psi \circ (\eta \circ \theta)$$

qui montre donc que le diagramme ($\square$) commute et donc que $\hat\theta : \mathrm{Hom}(U, -) \to \mathrm{Hom}(V, -)$ est une transformation naturelle.

Exercice 6. (a) Soit G un groupe fini. Montrer que $G \times - : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ qui fait correspondre au groupe fini H le produit cartésien $G \times H \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ est un foncteur. (Il faudra définir comment $G \times -$ agit sur les morphismes.
(b) Montrer que chaque morphisme de groupe $H \to K$ définit une transformation naturelle $(H \times -) \to (K \times -)$ entre les deux foncteurs $H \times -$ et $K \times -$.
(Cet exercice est tiré du livre de Mac Lane, # 2, p. 18.)

Exercice 7. Soient U, V deux $\mathbb{C}G$-modules. Définir une transformation naturelle pour la paire de foncteurs $\mathrm{Hom}(-, U), \mathrm{Hom}(-, V) : \mathrm{Mod}\, G \to \mathcal{V}$.

5 Paire de foncteurs adjoints

Voici enfin un dernier concept de la théorie des catégories dont nous avons donné un exemple dans le cours.

Définition 5.1. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ deux foncteurs. Le foncteur F est adjoint à gauche de G (ou G est adjoint à droite de F ou encore (F, G) est une paire adjointe) si, pour chaque $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, il existe une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$$

qui est fonctorielle en les deux variables.

Soit $H \subset G$ un sous-groupe de G. Rappelons les foncteurs induction $\uparrow$ et restriction $\downarrow$ discutés à la section 2 : le premier est un foncteur $\mathrm{Mod}\, H \to \mathrm{Mod}\, G$, alors que le second en est un $\mathrm{Mod}\, G \to \mathrm{Mod}\, H$. Alors, en posant $F = \uparrow$ et $G = \downarrow$ dans la définition suivante avec $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}\, H$ et $\mathcal{D} = \mathrm{Mod}\, G$, $Y = U$ un $\mathbb{C}G$-module et $X = V$ un $\mathbb{C}H$-module, la définition ci-dessus énoncera que $(\uparrow, \downarrow)$ est une paire adjointe si

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(V, U \downarrow H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V \uparrow G, U).$$

Mais cette bijection (en fait cet isomorphisme d'espaces vectoriels) est précisément le théorème de réciprocité de Frobenius. Ainsi ce théorème peut être reformulé comme : la paire de foncteurs $(\uparrow, \downarrow)$ est adjointe.

Exercice 8. (a) (Assem, # 36, p. 90) Soit (F, G) une paire adjointe de foncteurs $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Montrer l'existence de morphismes fonctoriels $FG \to 1_{\mathcal{D}}$ et $GF \to 1_{\mathcal{C}}$ où le foncteur $1_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ est le foncteur identité, et similairement pour $1_{\mathcal{C}}$. Note : cet exercice est difficile.
(b) Calculer ces morphismes fonctoriels pour la paire adjointe $(\uparrow, \downarrow)$.

6 Une courte conclusion

La théorie des catégories a mis un certain temps à s'imposer. Au début elle fut en effet considérée comme une reformulation inutilement abstraite de propriétés élémentaires. Même ses créateurs, Samuel Eilenberg et Saunders Mac Lane, la qualifiaient de « *formal non-sense* ». Mais, avec les années, beaucoup de domaines des mathématiques l'ont adopté, lorsque les mathématiciens réalisèrent qu'elle poursuivait les efforts d'Emmy Noether consacrés à illuminer les structures mathématiques et les opérations qui les préservent.

Références

Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer (1971).
Ibrahim Assem, *Algèbres et modules*, Masson et Les Presses de l'Université d'Ottawa (1997).