Chapitre 1

Fonctions récursives

DÉFINITION 1 *Une fonction arithmétique est une fonction de la forme*

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}.$$

Les fonctions primitives récursives et récursives sont générées à partir des fonctions de base suivantes.

Fonctions de base :

1. la fonction successeur s : $s(x) = x + 1$;
2. la fonction zéro z : $z(x) = 0$;
3. les fonctions projection ${p_i}^{(n)}$: ${p_i}^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i, 1 \leq i \leq n$.

Remarquons que la fonction identité fait partie des fonctions de base, car elle est égale à $p_1^{(1)}$.

Les fonctions primitives récursives se construisent avec deux types d'opérations que l'on peut itérer sur les fonctions de base définies précédemment. Ces opérations sont la *composition* et la *récurrence*.

DÉFINITION 2 *Soient* $g_1, g_2, \dots, g_k$ *des fonctions arithmétiques de* n *variables et* h *une fonction arithmétique de* k *variables. Soit* f *la fonction définie par*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = h(g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

f *est appelée la composition de* h *et de* $g_1, g_2, \dots, g_k$*, notée* $f = h \circ (g_1, g_2, \dots, g_k)$.

EXEMPLE 1 *Soient* $h(x_1, x_2) = s(x_1) + x_2$*,* $g_1(x) = x^3$ *et* $g_2(x) = x^2 + 9$.
Soit $f(x) = h \circ (g_1, g_2)(x)$ *pour* $x \geq 0$. *Alors,* f *peut s'écrire de manière simplifiée*

$$f(x) = x^3 + x^2 + 10.$$

Nous pouvons maintenant définir la récurrence.

DÉFINITION 3 *Soient* g *et* h *des fonctions arithmétiques totales de* n *et* $n+2$ *variables respectivement. La fonction* f *de* $n+1$ *variables définie par*

1. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
2. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y+1) = h(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y))$,

est appelée récurrence de base g et de pas h. *On permet* $n = 0$ *avec la convention qu'une fonction de zéro variable est une constante.*

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires pour définir les fonctions primitives récursives.

DÉFINITION 4 *Une fonction est primitive récursive si elle peut être obtenue de la fonction successeur, de la fonction zéro et des fonctions projection, par l'application d'un nombre fini de compositions et de récurrences.*

EXEMPLE 2 **(la fonction** add**)** *Nous pouvons définir l'addition,* $\mathrm{add}(m, n) = m + n$, *à partir de la fonction successeur, des fonctions projection* $p_1^{(1)}$ *et* $p_3^{(3)}$ *et d'une récurrence de base* $g(x) = p_1^{(1)}(x) = x$ *et de pas* $h(x, y, z) = s \circ p_3^{(3)}(x, y, z) = s(p_3^{(3)}(x, y, z)) = s(z)$.

$$\begin{cases} \mathrm{add}(m, 0) = g(m) = m, \\ \mathrm{add}(m, n+1) = h(m, n, \mathrm{add}(m, n)) = s(\mathrm{add}(m, n)). \end{cases}$$

EXEMPLE 3 **(la fonction** mult**)** *À partir de la fonction addition précédemment définie, des fonctions projection* $p_1^{(3)}$ *et* $p_3^{(3)}$, *et d'une récurrence de base* $g(x) = 0$ *et de pas* $h(x, y, z) = \mathrm{add}(p_1^{(3)}(x, y, z), p_3^{(3)}(x, y, z)) = \mathrm{add}(x, z)$, *nous pouvons définir la multiplication.*

$$\begin{cases} \mathrm{mult}(m, 0) = g(m) = 0, \\ \mathrm{mult}(m, n+1) = h(m, n, \mathrm{mult}(m, n)) = \mathrm{add}(m, \mathrm{mult}(m, n)). \end{cases}$$

EXEMPLE 4 **(la fonction** exp**)** *De façon similaire on peut définir la fonction exponentielle* $\exp(m, n) = m^n$. *Il suffit de choisir* $g(x) = 1$ *et* $h(x, y, z) = \mathrm{mult}(x, z)$. *Notons ici que, dans le but d'alléger la notation, nous n'utilisons plus la fonction projection. Nous avons alors :*

$$\begin{cases} \exp(m, 0) = 1, \\ \exp(m, n+1) = \mathrm{mult}(m, \exp(m, n)). \end{cases}$$

EXEMPLE 5 *Pour définir la récursion* $\mathrm{add}(m, n+1)$, *nous avons utilisé la fonction successeur. Pour* $\mathrm{mult}(m, n+1)$, *nous avons utilisé* add *et pour* $\exp(m, n+1)$, *nous avons utilisé* mult. *La prochaine fonction qui est formée en suivant le même processus est une tour d'exponentielles. Notons* $\mathrm{add}(m,n) = f_1(m,n)$, $\mathrm{mult}(m,n) = f_2(m,n)$, $\exp(m,n) = f_3(m,n)$. *On définit* f_4 *par*

$$\begin{cases} f_4(m,0) = 1 \\ f_4(m,n+1) = f_3(m, f_4(m,n)). \end{cases}$$

On a alors

$$f_4(m,n) = \underbrace{m^{m^{m^{\cdots^{m}}}}}_{n \text{ fois}}.$$

La fonction f_4 *est appelée tétration ou tour de puissance.*

Similairement, pour $i > 4$, *on peut définir* $f_i(m,n)$ *par*

$$\begin{cases} f_i(m,0) = 1, \\ f_i(m,n+1) = f_{i-1}(m, f_i(m,n)). \end{cases}$$

Ces fonctions sont appelées puissances itérées de Knuth. Chaque fonction f_{i+1} *croît inimaginablement plus vite que* f_i.

EXEMPLE 6 *La fonction factorielle est une fonction primitive récursive. On définit la fonction factorielle comme suit :*

$$\begin{cases} \mathrm{fact}(0) = 1, \\ \mathrm{fact}(n+1) = \mathrm{mult}(n+1, \mathrm{fact}(n)). \end{cases}$$

Après avoir montré que l'addition est une fonction primitive récursive, on peut se demander s'il en est de même pour la soustraction. La soustraction usuelle n'est pas une fonction totale dans $\mathbb{N}$. En effet, si on prend $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f(x,y) = x - y$, on remarque que, par exemple, $f(3,5)$ n'est pas définie. Il faut donc définir un autre type de soustraction pour avoir une fonction totale sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Nous allons appeler cette fonction la *soustraction propre*.

DÉFINITION 5 *La soustraction propre est définie comme suit :*

$$\begin{cases} \mathrm{sous}(x,y) = x - y & \textit{si} \quad x \geq y, \\ \mathrm{sous}(x,y) = 0 & \textit{si} \quad x < y. \end{cases}$$

EXEMPLE 7 *La soustraction propre est une fonction primitive récursive. Pour le démontrer, il faut procéder en deux étapes. On commence par démontrer que la fonction prédécesseur est une fonction primitive récursive et on s'en sert pour construire la soustraction propre.*

DÉFINITION 6 *La fonction prédécesseur se définit par récurrence :*

$$\begin{cases} \mathrm{pred}(0) = 0, \\ \mathrm{pred}(y+1) = y. \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant construire la soustraction propre en utilisant la récurrence et la composition.

$$\begin{cases} \mathrm{sous}(m, 0) = m, \\ \mathrm{sous}(m, n+1) = \mathrm{pred}(\mathrm{sous}(m, n)). \end{cases}$$

Pour pouvoir parler de relations primitives récursives et récursives, on introduit les deux fonctions suivantes

$$\begin{cases} \mathrm{sgn}(0) = 0, \\ \mathrm{sgn}(y+1) = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{cosgn}(0) = 1, \\ \mathrm{cosgn}(y+1) = 0. \end{cases}$$

EXEMPLE 8 *Soient* $R_1(x, y)$, $R_2(x, y)$ *et* $R_3(x, y)$ *les trois énoncés* « $x < y$ », « $x > y$ » *et* « $x = y$ » *respectivement.* R_1, R_2 *et* R_3 *sont des relations binaires.*

Lorsqu'on évalue les variables, une relation peut être vraie ou fausse.

DÉFINITION 7 *Étant donné une relation* R *à* k *entrées, sa fonction caractéristique, notée* C_R*, est la fonction à valeurs dans* $\{0, 1\}$ *qui, à des nombres* $x_1, \dots, x_k$*, associe la valeur* 0 *si* $R(x_1, \dots, x_k)$ *est vraie et* 1 *sinon.*

Nous pouvons définir de façon primitive récursive les fonctions caractéristiques des trois prédicats binaires introduits dans l'exemple 8 précédent.

$$\begin{array}{rcl} C_{R_1}(x, y) & = & \mathrm{cosgn}(\mathrm{sous}(y, x)), \\ C_{R_2}(x, y) & = & \mathrm{cosgn}(\mathrm{sous}(x, y)), \\ C_{R_3}(x, y) & = & \mathrm{sgn}(\mathrm{sous}(x, y) + \mathrm{sous}(y, x)), \end{array} \tag{1.1}$$

où, par abus de notation, nous écrivons $\mathrm{sous}(x, y) + \mathrm{sous}(y, x)$ plutôt que

$$\mathrm{add} \circ (\mathrm{sous}, \mathrm{sous} \circ (p_2^2, p_1^2))(x, y)).$$

DÉFINITION 8 *Une relation est primitive récursive si sa fonction caractéristique est primitive récursive.*

EXEMPLE 9 *Les relations* « $x < y$ », « $x > y$ » *et* « $x = y$ » *de l'exemple 8 sont primitives récursives. Nous avons en effet construit leur fonction caractérisques en* (1.1) *par composition de fonctions primitives récursives.*

EXEMPLE 10 *La fonction d'Ackermann définie par*

1. $A(0, y) = y + 1$,
2. $A(x + 1, 0) = A(x, 1)$,
3. $A(x + 1, y + 1) = A(x, A(x + 1, y))$,

n'est pas primitive récursive, mais elle est ceendant calculable. La fonction d'Ackermann a la propriété de « croître plus rapidement » que toutes les fonctions primitives récursives, d'où son attrait. Mais puisqu'elle croît plus rapidement que toute fonction primitive récursive, elle ne peut en être une. Les preuves de ces propriétés sont arides, nous nous abstiendrons de les faire ici.

Pour définir une nouvelle famille de fonctions calculables qui contient celle des fonctions primitives récursives, nous introduisons une nouvelle opération : la *minimalisation*.

DÉFINITION 9 *Soient* R *un prédicat de* $(k+1)$ *variables qui a la propriété que pour tous* $x_1, \ldots, x_k$ *il existe* n *tel que* $R(x_1, \ldots, x_k, n)$ *est vrai, et soit* C_R*, la fonction caractéristique de* R*. L'expression* $\mu n[p(x_1, \ldots, x_k, n)]$ *représente le plus petit nombre naturel* n *tel que* $R(x_1, \ldots, x_k, n)$ *est vrai, c'est-à-dire tel que* $C_R(x_1, \ldots, x_k, n) = 0$*. Cette construction s'appelle la* $\mathrm{minimalisation}$ *de* R*, et* μn *est appelé l'opérateur* μ*. Il permet de définir une fonction* f *de* n *variables,*

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \mu n[R(x_1, \ldots, x_k, n)].$$

DÉFINITION 10 *Les familles des fonctions et des relations récursives sont définies comme suit.*

1. *Les fonctions successeur, zéro et projection sont récursives.*
2. *Soient* $g_1, g_2, \ldots, g_k$ *et* h *des fonctions récursives. Soit* f *la composition de* h *et de* $g_1, g_2, \ldots, g_k$*. Alors,* f *est une fonction récursive.*
3. *Soient* g *et* h *deux fonctions récursives. Soit* f *la récurrence de base* g *et de pas* h*. Alors,* f *est une fonction récursive.*
4. *Une relation est récursive si sa fonction caractéristique est récursive.*
5. *Soit* R *un relation récursive de* $n+1$ *variables, telle que pour tous* $x_1, \ldots, x_k$ *il existe* n *tel que* $R(x_1, \ldots, x_k, n)$ *est vrai. La fonction* f *obtenue par minimalisation de* R *est récursive.*
6. *Une fonction est récursive si elle peut être obtenue par un nombre fini de compositions, de récurrences et de minimalisations à partir des fonctions successeur, zéro et projection.*

Les trois premiers points de la définition ci-dessus impliquent que toutes les fonctions primitives récursives sont aussi récursives. Nous affirmons sans preuve le résultat suivant.

PROPOSITION 1 *La fonction d'Ackermann définie dans l'exemple 10 est récursive.*