Chapitre 1

Les fractions continues

Christiane Rousseau

1.1 Introduction

Pour motiver les fractions continues, commençons par regarder un exemple avec un des plus célèbres nombres irrationnels : le nombre d'or.

EXEMPLE 1 *Soit* $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. *Ce nombre, appelé « nombre d'or », a une valeur approximative de* $1,61803$. *Il est solution de l'équation quadratique*

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0. \tag{1.1}$$

Divisons cette équation par ϕ. *On obtient*

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}.$$

Remplaçons l'occurrence de ϕ *au dénominateur par* $1 + \frac{1}{\phi}$. *On obtient*

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}}.$$

Remplaçons l'occurrence de ϕ *dans la fraction par* $1 + \frac{1}{\phi}$. *On obtient :*

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\phi}}}.$$

On voit bien qu'on peut continuer à l'infini. Ceci suggère l'écriture de ϕ *comme « fraction continue »*

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}.$$

Nous allons introduire une notation pour une telle fraction : Nous noterons

$$\phi = [1, 1, 1, \dots].$$

Une telle écriture peut être finie ou infinie. Que signifie-t-elle ? On peut arrêter cette fraction à chaque étape en négligeant le reste : la fraction obtenue est appelée réduite de la fraction continue. La suite des réduites est une suite de nombres rationnels :

$$\begin{aligned}
&1 = [1],\\
&1 + \frac{1}{1} = [1, 1],\\
&1 + 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = [1, 1, 1],\\
&1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = [1, 1, 1, 1],\\
&\qquad\vdots\\
&[1, 1, \dots, 1],\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}$$

Calculons ces nombres :

$$1, \qquad 2, \qquad \frac{3}{2}, \qquad \frac{5}{3}, \qquad \frac{8}{5}, \qquad \frac{13}{8}, \qquad \dots$$

On montrera à l'exercice 1.5 que cette suite convergera vers le nombre d'or. Vérifions le déjà expérimentalement. La suite vaut

$$1, \quad 2, \quad \frac{3}{2} = 1,5, \quad \frac{5}{3} = 1,666\dots, \quad \frac{8}{5} = 1,6, \quad \frac{13}{8} = 1,625, \quad \dots$$

On observe que non seulement la suite semble converger vers ϕ, mais qu'elle alterne entre des termes plus petits que ϕ et des termes plus grands que ϕ. Ce sera toujours le cas avec les fractions continues.

Les fractions continues ont de nombreuses applications, en général en lien avec les approximations des nombres irrationnels par des nombres rationnels. Les réduites d'une fraction continue sont en effet les meilleures approximations du nombre irrationnel représenté par la fraction continue infinie. On classifie les nombres irrationnels en liouvilliens ou diophantiens suivant qu'ils sont ou non bien approximés par les rationnels. Les applications en science sont nombreuses, notamment en phyllotaxie et en mécanique céleste : la nature semble faire la différence entre les nombres irrationnels diophantiens ou liouvilliens ! On en touchera quelques mots à la fin du chapitre.

1.2 L'écriture d'un nombre réel positif en fraction continue

THÉORÈME 1 *Tout nombre réel positif* b *a une écriture unique comme fraction continue*

$$b = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}} = [a_1, a_2, a_3, \dots].$$

L'écriture est finie si et seulement si le nombre est rationnel.

PREUVE Soit b un nombre réel positif. Alors, $b = [b] + \{b\}$, où $[b]$ est la partie entière de b et $\{b\}$ sa partie fractionnaire. Posons $a_1 = [b]$ et $\alpha_1 = \{b\}$. Alors, $\alpha_1 \in [0, 1)$. Si $\alpha_1 = 0$, l'écriture s'arrête là. Sinon, $b_2 = \frac{1}{\alpha_1} > 1$. Alors $b_2 = [b_2] + \{b_2\}$. Posons $a_2 = [b_2]$ et $\alpha_2 = \{b_2\}$. Si $\alpha_2 = 0$, alors l'écriture s'arrête là. Sinon, $b_3 = \frac{1}{\alpha_2} > 1$. On itère.

Décrivons l'étape générale : $b_n = [b_n] + \{b_n\}$. Posons $a_n = [b_n]$ et $\alpha_n = \{b_n\}$. Si $\alpha_n = 0$, alors l'écriture s'arrête là. Sinon, $b_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n} > 1$.

Montrons l'unicité de cette écriture. Supposons que b ait deux écritures en fraction continue :

$$b = [a_1, a_2, \dots] = [c_1, c_2, \dots].$$

Alors la partie entière de b, soit $[b]$, est égale à a_1 et aussi à c_1. Considérons maintenant $b_1 = \{b\} = b - [b]$. Alors $\frac{1}{b_1} = [a_2, a_3, \dots] = [c_2, c_3, \dots]$. Pour la même raison que précédemment, $a_2 = c_2$. Etc.

Il nous reste maintenant à montrer que l'écriture est finie si et seulement si le nombre est rationnel. Une direction est évidente. Si on a une fraction continue finie, alors on peut simplifier la fraction en plusieurs étapes (comme on l'a fait dans l'exemple précédent) pour finalement la ramener à la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont deux entiers. Dans l'autre direction, supposons que $b = \frac{p}{q}$. Divisons p par q :

$$p = a_1 q + r_1, \qquad 0 \leq r_1 < q.$$

Alors, $[b] = a_1$ et $\{b\} = \alpha_1 = \frac{r_1}{q}$. Si $r_1 = 0$, on a fini. Sinon, $\frac{1}{\alpha_1} = \frac{q}{r_1}$. Divisons q par r_1 :

$$q = a_2 r_1 + r_2, \qquad 0 \leq r_2 < r_1.$$

Alors, $\left[\frac{1}{\alpha_1}\right] = a_2$ et $\left\{\frac{1}{\alpha_1}\right\} = \alpha_2 = \frac{r_2}{r_1}$. Si $r_2 = 0$, on a fini. Sinon, $\frac{1}{\alpha_2} = \frac{r_1}{r_2}$. Divisons r_1 par r_2 :

$$r_1 = a_3 r_2 + r_3, \qquad 0 \leq r_3 < r_2.$$

Etc. Peut-on continuer indéfiniment ? Non, puisqu'on a la suite décroissante

$$0 \leq \dots \leq r_n < r_{n-1} < \dots < r_2 < r_1 < q,$$

il existe nécessairement n tel que $r_n = 0$ et on peut même voir que $n \leq q$. Donc, la fraction continue est finie. $\square$

REMARQUE 1 *Nous voyons une première différence avec le développement décimal. Le développement décimal d'un nombre rationnel est fini ou périodique. Le développement en fraction continue d'un nombre rationnel est toujours fini. Une deuxième différence réside dans le fait que le développement décimal n'est pas toujours unique, alors que le développement en fraction continue est unique.*

Peut-on avoir un développement en fraction continue périodique ? Oui ! Nous avons vu que le développement en fraction continue de $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est périodique puisque tous les a_n sont égaux à 1. Les seuls nombres dont le développement en fraction continue devient périodique sont les *nombres irrationnels quadratiques* que nous allons définir ci-dessous. Un exemple typique de nombre irrationnel quadratique est le nombre d'or $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ce théorème est difficile et nous ne démontrerons qu'une direction. Par contre, nous l'appliquerons abondamment dans les exercices.

NOTATION 1 *Comme dans le cas des développements décimaux, nous allons noter par un barre, une partie de la fraction continue qui se répète périodiquement. Ainsi, nous noterons par*

$$[a_1, \dots a_r, \overline{a_{r+1}, \dots, a_{r+s}}]$$

une fraction continue infinie $[a_1, a_2, \dots]$*, telle que* $a_n = a_n + s$ *pour* $n \geq r + 1$.

DÉFINITION 1 *Une fraction continue est* périodique *si elle est infinie et de la forme* $[a_1, \dots a_r, \overline{a_{r+1}, \dots, a_{r+s}}]$.

DÉFINITION 2 *Un nombre* b *irrationnel est appelé* nombre irrationnel quadratique *si et seulement si le nombre* b *est irrationnel et racine d'un polynôme quadratique de la forme* $Ax^2 + Bx + C$ *à coefficients entiers* A, B, C.

PROPOSITION 1 *Un nombre* b *un nombre irrationnel quadratique si et seulement si* b *est de la forme* $b = c + d\sqrt{m}$*, où* c *et* d *sont des nombres rationnels,* m *est un entier qui n'est pas un carré parfait et* $b \geq 0$.

PREUVE Exercice !

THÉORÈME 2 *La fraction continue d'un nombre réel positif* b *est périodique si et seulement si le nombre* b *est un nombre irrationnel quadratique.*

PREUVE Si b est irrationnel et racine d'un polynôme quadratique de la forme Ax^2+Bx+C à coefficients entiers A, B, C, Lagrange a montré que son développement en fraction continu est périodique. Cette preuve est assez astucieuse et ne sera pas reproduite ici. L'autre direction est plus facile et utilise la même démarche que dans les exercices. Commençons par le cas plus simple d'une fraction continue périodique $b = [\overline{a_1, \dots, a_s}]$. Pour cela il suffit de remarquer que

$$b = [a_1, \dots, a_s, b].$$

Le membre de droite est une fraction compliquée, mais que l'on peut simplifier de proche en proche, jusqu'à la ramener à la forme simple $\frac{P_1 b+P_2}{Q_1 b+Q_2}$, où P_1, P_2, Q_1, Q_2 sont des entiers positifs. Alors, $b = \frac{P_1 b+P_2}{Q_1 b+Q_2}$ si et seulement si $(Q_1 b + Q_2)b = P_1 b + P_2$, c'est-à-dire $Q_1 b^2 + (Q_2 - P_1)b - P_2 = 0$. Donc, b est racine d'un polynôme quadratique Ax^2+Bx+C tel qu'annoncé : il faut prendre $A = Q_1$, $B = Q_2 - P_1$ et $C = -P_2$. Remarquons aussi que ce polynôme a deux racines de signe contraire puisque $AC < 0$. Donc, b est uniquement déterminé comme la seule racine positive de ce polynôme.

Considérons maintenant un nombre b de la forme

$$b = [a_1, \dots a_r, \overline{a_{r+1}, \dots, a_{r+s}}].$$

Alors,

$$b = [a_1, \dots a_r, c],$$

où c est le nombre

$$c = [\overline{a_{r+1}, \dots, a_{r+s}}]$$

que l'on a pu déterminé. On peut, comme précédemment simplifier la fraction $[a_1, \dots a_r, c]$ pour la ramener à la forme

$$[a_1, \dots a_r, c] = \frac{P_4 c + P_3}{Q_4 c + Q_3}.$$

On connaît la forme de c. En rationnalisant le dénominateur de $\frac{P_4 c+P_3}{Q_4 c+Q_3}$ on peut ramener cette fraction à la forme $a + d\sqrt{m}$, où a et d sont des nombres rationnels et m est un entier qui n'est pas un carré parfait. On a donc $b = a + d\sqrt{m}$. On en tire $b - a = d\sqrt{m}$. Élevons au carré : $(b-a)^2 = d^2 m$ ou encore

$$b^2 - 2ab + a^2 - d^2 m = 0.$$

En multipliant par le dénominateur commun on obtient une équation du second degré $Ab^2 + Bb + C = 0$ à coefficients entiers dont b est racine. □

Regardons trois exemples pour illustrer le tout.

EXEMPLE 2 *Quel est le nombre* b *dont la fraction continue est* $[\overline{1}]$ *? On a* $b = 1 + \frac{1}{b}$*, ou encore* $b^2 - b - 1 = 0$ *eton trouve bien* $b = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *tel qu'annoncé au début.*

EXEMPLE 3 *Quel est le nombre* b *dont la fraction continue est* $[\overline{4, 5}]$ *? On a* $b = 4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{b}}$*. Alors*

$$b = 4 + \frac{b}{5b+1} = \frac{21b+4}{5b+1}.$$

On en tire

$$b(5b+1) = 21b + 4,$$

ou encore,

$$5b^2 - 20b - 4.$$

On obtient finalement

$$b = \frac{20 + \sqrt{480}}{10} = \frac{10 + \sqrt{120}}{5}.$$

EXEMPLE 4 *Quel est le nombre* b *dont la fraction continue est* $[1, 1, \overline{4, 5}]$ *? On a* $b = [1, 1, c]$ *où* $c = \frac{10+\sqrt{120}}{5}$ *a été calculé à l'exemple précédent. Alors,*

$$b = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{c}} = \frac{2c+1}{c+1}.$$

Remplaçons c *par sa valeur :*

$$b = \frac{25 + 2\sqrt{120}}{15 + \sqrt{120}}.$$

Rationnalisons le dénominateur :

$$\begin{aligned} b &= \frac{(25 + 2\sqrt{120})(15 - \sqrt{120})}{(15 + \sqrt{120})(15 - \sqrt{120})} \\ &= \frac{375 - 240 + 5\sqrt{120}}{225 - 120} \\ &= \frac{135 + 5\sqrt{120}}{105} \\ &= \frac{27 + \sqrt{120}}{21}. \end{aligned}$$

Nous avons dit qu'il est difficile de démontrer qu'un nombre irrationnel qui est racine d'un polynôme à coefficients entiers a une fraction continue qui devient périodique. Par contre, dans beaucoup d'exemples ceci se voit facilement. Regardons un exemple.

EXEMPLE 5 *Trouver la fraction continue de* $b = 3 + \sqrt{2}$*. On a* $[b] = a_1 = 4$ *et* $\{b\} = \alpha_1 = \sqrt{2} - 1$*. Alors,* $\frac{1}{\alpha_1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$*. D'où* $a_2 = [\sqrt{2} + 1] = 2$ *et* $\alpha_2 = (\sqrt{2} + 1) - 2 = \sqrt{2} - 1$*. On a* $\alpha_2 = \alpha_1$ *! Donc,* $b = [4, \overline{2}]$.

1.3 Les réduites d'un nombre positif

Lorsqu'on tronque la fraction continue d'un nombre positif b, on obtient un nombre rationnel $\frac{p_n}{q_n}$ qui est une approximation de b. Si b s'écrit en fraction

continue comme
$$b = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \dots}}},$$
alors les réduites de b sont

1. $$\frac{p_1}{q_1} = a_1,$$
   ce qui nous donne
   $$\begin{cases} p_1 = a_1, \\ q_1 = 1, \end{cases}$$
2. $$\frac{p_2}{q_2} = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{1 + a_1 a_2}{a_2},$$
   ce qui nous donne
   $$\begin{cases} p_2 = a_2 a_1 + 1 = a_2 p_1 + 1, \\ q_2 = a_2 = a_2 q_1. \end{cases}$$
3. La réduite suivante est
   $$\frac{p_3}{q_3} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}} = \frac{a_3(a_1 a_2 + 1) + a_1}{a_2 a_3 + 1},$$
   ce qui nous donne
   $$\begin{cases} p_3 = a_3(a_1 a_2 + 1) + a_1 = a_3 p_2 + p_1, \\ q_3 = a_2 a_3 + 1 = a_3 q_2 + q_1. \end{cases}$$
4. En sautant le détail des calculs, la réduite suivante est
   $$\begin{aligned} \frac{p_4}{q_4} &= a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}} \\ &= \frac{a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 + a_1 a_4 + a_3 a_4 + 1}{a_2 a_3 a_4 + a_2 + a_4} \\ &= \frac{a_4(a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3) + (a_1 a_2 + 1)}{a_4(a_2 a_3 + 1) + a_2}, \end{aligned}$$
   ce qui nous donne
   $$\begin{cases} p_4 = a_4 p_3 + p_2, \\ q_3 = a_4 q_3 + q_2. \end{cases}$$

On voit déjà poindre une formule que l'on va vouloir montrer par induction. En même temps, on voit que les calculs peuvent devenir fastidieux et qu'il faut être un peu astucieux pour les mener à terme.

THÉORÈME 3 *Les réduites d'un nombre* b *dont l'écriture en fraction continue est*

$$b = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \dots}}}$$

sont de la forme $\frac{p_n}{q_n}$*, où*

$$\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \end{cases} \tag{1.2}$$

sous les conditions initiales

$$\begin{cases} p_0 = 1 \\ q_0 = 0, \\ p_1 = a_0, \\ q_1 = 1. \end{cases} \tag{1.3}$$

PREUVE La formule est vraie pour $n = 2$ (exercice). Supposons qu'elle soit vraie pour n et montrons la pour $n+1$. Comment peut-on calculer la réduite $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ si on connait $\frac{p_n}{q_n}$? Il faut se convaincre que cela revient à remplacer a_n par $a_n + \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n a_{n+1}+1}{a_{n+1}}$ dans (1.2). Faisons-le et appelons $\frac{p}{q}$ ce nombre rationnel :

$$\begin{aligned}
\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} &= \frac{\frac{a_n a_{n+1}+1}{a_{n+1}} p_{n-1} + p_{n-2}}{\frac{a_n a_{n+1}+1}{a_{n+1}} q_{n-1} + q_{n-2}} \\
&= \frac{\frac{(a_n a_{n+1}+1)p_{n-1} + a_{n+1} p_{n-2}}{a_{n+1}}}{\frac{(a_n a_{n+1}+1)q_{n-1} + a_{n+1} q_{n-2}}{a_{n+1}}}. \\
&= \frac{(a_n a_{n+1}+1)p_{n-1} + a_{n+1} p_{n-2}}{(a_n a_{n+1}+1)q_{n-1} + a_{n+1} q_{n-2}} \\
&= \frac{a_{n+1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} \\
&= \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}}.
\end{aligned}$$

□

REMARQUE 2 *Les suites* $\{p_n\}$ *et* $\{q_n\}$ *définies en* (1.2) *sont croissantes et tendent vers l'infini quand* n *tend vers l'infini.*

Nous n'avons pas encore montré que l'écriture d'une fraction continue converge toujours, quels que soient les entiers $a_1, a_2, \dots$ Nous avons maintenant les outils pour le faire.

THÉORÈME 4 *On considère une suite de nombres entiers positifs* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *et les suites* $\{p_n\}$ *et* $\{q_n\}$ *définies en* (1.2) *sous les conditions initiales* (1.3)*. Alors,*

1. $$p_nq_{n+1} - p_{n+1}q_n = \begin{cases} 1, & n \quad \textit{pair}, \\ -1, & n \quad \textit{impair}. \end{cases}$$

2. $$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{q_nq_{n+1}}.$$

3. *Pour* $n \geq 1$,
$$\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} < \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} < \frac{p_{2n}}{q_{2n}}.$$

4. *La suite* $\frac{p_n}{q_n}$*, qui est la suite des réduites de la fraction continue* $[a_1, a_2, a_3, \dots]$ *converge.*

PREUVE

1. On montre la propriété par induction. C'est vrai pour $n = 0$. On peut réécrire la propriété sous la forme $p_nq_{n+1} - p_{n+1}q_n = (-1)^n$. Supposons qu'elle soit vérifiée pour n. Calculons $p_{n+1}q_{n+2} - p_{n+2}q_{n+1}$. On remplace
$$\begin{cases} p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n, \\ q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n. \end{cases}$$
Alors,
$$\begin{aligned} p_{n+1}q_{n+2} - p_{n+2}q_{n+1} &= p_{n+1}(a_{n+2}q_{n+1} + q_n) - (a_{n+2}p_{n+1} + p_n)q_{n+1} \\ &= p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} \\ &= -(-1)^n = (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} &= \frac{p_{2n}q_{2n+1} - q_{2n}p_{2n+1}}{q_{2n}q_{2n+1}} \\ &= \frac{1}{q_{2n}q_{2n+1}}, \end{aligned}$$
la dernière ligne venant de 1.

3. Par 2., on a
$$\begin{cases} \frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = \frac{1}{q_{2n}q_{2n+1}} > 0, \\ \\ \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{-1}{q_{2n-1}q_{2n}} < 0, \\ \\ \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} = \frac{-1}{q_{2n+1}q_{2n+2}} < 0, \end{cases}$$
ce qui nous donne l'inégalité du milieu. Pour la première inégalité, additionnons les deux premières lignes. On obtient
$$\begin{aligned} \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} &= \frac{1}{q_{2n}q_{2n+1}} - \frac{1}{q_{2n-1}q_{2n}} \\ &= \frac{q_{2n-1} - q_{2n+1}}{q_{2n-1}q_{2n}q_{2n+1}} < 0, \end{aligned}$$
car la suite q_n est croissante. La troisième inégalité se fait de manière similaire en additionnant les deux dernières lignes. (Exercice !)
4. La suite $\{\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\}$ est croissante et bornée supérieurement. Elle converge donc vers un nombre b. De même, la suite $\{\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}\}$ est décroissante et bornée inférieurement. Elle converge vers un nombre c. Comme $\lim_{n\to\infty} \frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} = 0$, nécessairement $b = c$. Ici, on va accepter intuitivement cet argument. Dans le cours MAT 1000, il deviendra rigoureux.

□

1.4 L'approximation des nombres irrationnels par des nombres rationnels

Nous avons vu à l'exemple 1.5 que la suite des réduites $\frac{p_n}{q_n}$ de la fraction continue de ϕ nous donne des approximations de $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ par des nombres rationnels. Visualisons cela sur la figure 1.1 : sur cette figure on a marqué les points de coordonnées entières (q, p), et on a tracé la droite de pente ϕ. Elle ne passe donc par aucun point de coordonnées entières sauf $(0, 0)$. Un point (q, p) à coordonnées entières se trouve sur la droite de pente $\frac{p}{q}$. Il est proche de la droite de pente ϕ lorsque $\frac{p}{q}$ est une bonne approximation de ϕ. Sur la figure, nous avons grossi les points correspondant aux meilleures approximations de ϕ. Ce sont les points $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$ et $(5, 8)$. Si l'on voulait obtenir une meilleure approximation de ϕ, il faudrait agrandir la figure pour aller chercher le point $(8, 13)$, etc. Expérimentalement nous observons que les meilleures approximations rationnelles de ϕ sont données par les réduites de ϕ. Ceci est tout à fait général pour n'importe quel nombre irrationnel. C'est un théorème de Lagrange que nous ne démontrerons pas (voir [1] pour la preuve).

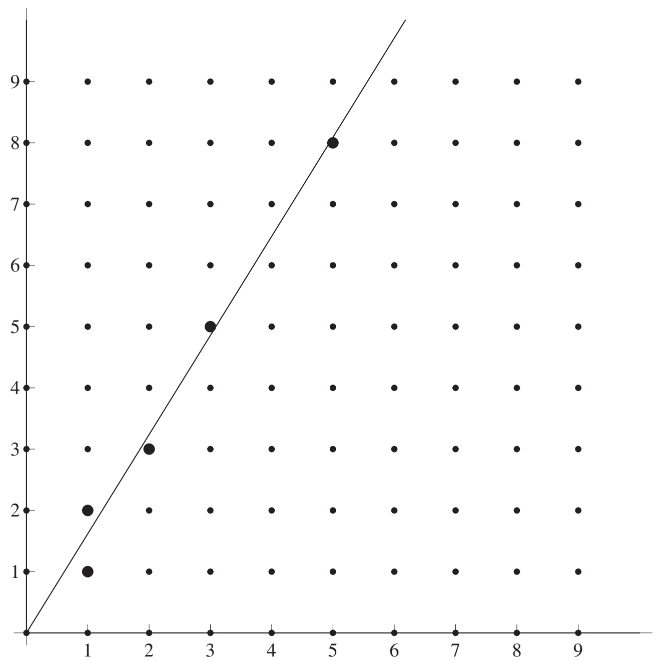

FIG. 1.1 – L'approximation du nombre d'or par des rationnels

THÉORÈME 5 *(Lagrange) Soit* b *un nombre irrationnel et* $\frac{p_n}{q_n}$ *une réduite de* b. *Alors parmi tous les nombres de la forme* $\frac{p}{q}$, *où* $q \leq q_n$ *on a*

$$\left|b - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|b - \frac{p}{q}\right|$$

si $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$.

De plus on connaît approximativement la qualité de l'approximation puisqu'on sait que b est coïncé entre $\frac{p_n}{q_n}$ et $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ et que

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Applications L'approximation des nombres irrationnels par des nombres rationnels est un chapitre très important des mathématiques avec de nombreuses applications. On peut classer les nombres irrationnels en différentes catégories, suivant qu'ils ont ou non bien approximés par les rationnels. Pour cela on regarde la taille des restes $b - \frac{p_n}{q_n}$ en fonction de q_n. Si les restes ne sont pas trop petits, par exemple

$$\left|b - \frac{p_n}{q_n}\right| > \frac{C}{q_n^{\beta}},$$

où C et β sont des nombres positifs, alors le nombre irrationnel est dit *diophantien*. Dans le cas contraire, il est dit *liouvillien*. Tous les nombres irrationnels quadratiques sont diophantiens. Et l'on entend souvent dire que le nombre d'or est « le plus irrationnel » de tous les nombres rationnels. Prenons au contraire la suite $\{a_n\}$, où $a_n = 10^n$. Alors le nombre $[a_1, a_2, \dots]$ est liouvillien.

Le nombre d'or et les nombres de Fibonacci apparaissent dans les spirales des végétaux. Une explication de ce phénomène repose sur le fait que le nombre d'or est « le plus irrationnel » de tous les nombres rationnels.

Dans le système solaire on observe une ceinture d'astéroïdes entre Mars et Jupiter. Les périodes de ces astéroïdes ont été répertoriées et on a été surpris de voir qu'on n'observait aucune période qui soit un multiple rationnel simple de la période de Jupiter, T_J, soit un nombre de la forme $\frac{p}{q}T_J$, où p et q ne sont pas trop grands. Depuis les années 1980, il existe une théorie expliquant ce phénomène. Les simulations montrent que les astéroïdes qui ont pu avoir une période $\frac{p}{q}T_J$, ou encore de la forme bT_J, où b est liouvillien, ont eu un comportement chaotique et ont été expulsés du système solaire.

1.5 Exercices

1. La suite de Fibonacci est la suite $\{F_n\}$ des nombres définis par

$$\begin{cases} F_1 = 1, \\ F_2 = 1, \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \end{cases}$$

Montrer que les réduites du nombre d'or sont données par le quotient de deux nombres consécutifs de Fibonacci $\frac{F_{n+1}}{F_n}$.

2. Donner le développement en fraction continue de $\frac{116}{27}$.

3. Quel est le nombre dont le développement en fraction continue est

$$5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}?$$

4. Voici les 12 premières décimales de π : 3, 141592653589. Les anciens savaient que $22/7$ et $333/106$ sont deux nombres rationnels qui approximent π. Montrer que ce sont deux réduites de π. Calculer les deux suivantes.

5. Trouver la fraction continue du nombre $\sqrt{2}$. Donner une approximation rationnelle de $\sqrt{2}$ à 4 décimales.

6. Trouver la fraction continue du nombre $\sqrt{3}+1$.

7. Soit $\{F_n\}$ la suite des nombres de Fibonacci. Montrer que la suite $\{\frac{F_{n+1}}{F_n}\}$ converge vers le nombre d'or.

8. Quel est le nombre dont la fraction continue est $[1,2,3,1,2,3,\dots] = [\overline{1,2,3}]$?

9. Montrer que le nombre b dont la fraction continue est $[\overline{a}]$ est $\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$.

10. Montrer que

$$[a_1, \overline{a_2,\dots,a_n}] = a_1 + \frac{1}{\overline{a_2,\dots,a_n}}.$$

11. Montrer que le nombre b dont la fraction continue est $[a,\overline{a}]$ est $\frac{2-a+\sqrt{a^2+4}}{2}$.

12. Montrer que le nombre b dont la fraction continue est $[a,\overline{2a}]$ est $\sqrt{a^2+1}$.

13. Montrer que

$$[\overline{a_1,a_2}] = \frac{-a_1a_2+\sqrt{a_1a_2(a_1a_2+4)}}{2a_1}.$$

14. La fraction continue du nombre e commence comme suit

$$e = [2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,\dots].$$

Trouver un nombre rationnel qui soit une approximation du nombre e jusqu'à la quatrième décimale.

15. Soit $\frac{p_1}{q_1},\dots,\frac{p_n}{q_n}$, les réduites de la fraction continue finie $[a_1,a_2,\dots,a_n]$, et soit b un nombre réel positif. Montrer que

$$[a_1,a_2,\dots,a_n,b] = \frac{bp_n+p_{n-1}}{cq_n+q_{n-1}}.$$

En déduire la valeur exacte des P_i, Q_i dans la preuve du théorème 2.

16. Expliquer pourquoi un nombre est liouvillien si la suite $\{a_n\}$ des nombres apparaissant dans sa fraction continue est non bornée et qu'il est diophantien sinon.

(a) Expliquer pourquoi il est naturel de dire que le nombre d'or est « le plus irrationnel » de tous les nombres rationnels.

(b) Dans le cas du nombre d'or ϕ, donner une borne supérieure pour $\left|\phi - \frac{p_n}{q_n}\right|$ en fonction de q_n seulement.

Bibliographie

[1] De Koninck, Jean-Marie et Armel Mercier, *Introduction à la théorie des nombres*, Mont-Royal (Québec), Modulo, 1994, 254 p.