Introduction à la résolution de problèmes

Rencontres Putnam 2004
Université de Sherbrooke
Jean-Philippe Morin

Note : Ce chapitre est grandement inspiré du premier chapitre du livre *Problem-Solving Through Problems*, de Loren C. Larson, paru sous Springer. Il s'agit d'un excellent outil de préparation pour le Putnam. Un autre ouvrage intéressant est le classique de George Polya : *How to solve it*.

1. Le concours Putnam

La compétition annuelle William Lowell Putnam existe depuis 1938. Elle est ajourd'hui organisée par la *Mathematical Association of America*. Voici un bref historique, ainsi que d'autres informations utiles sur cette grande compétition mathématique.

Elle a été instaurée en l'honneur de William Lowell Putnam, étudiant à Harvard en 1882, convaincu de valeur d'épreuves collectives organisées pendant les sessions d'études. Elle avait (et a toujours) pour but de stimuler une saine rivalité entre les collèges et universités du Canada et des États-Unis. La veuve de M. Putnam, Elizabeth Lowell Putnam, a créé en 1927 le *William Lowell Putnam Intercollegiate Memorial Fund*, qui servira plus tard à remettre les prix du concours. La première compétition supportée par ce fonds avait toutefois pour sujet la littérature anglaise. Ce n'est que quelques années plus tard qu'un concours expérimental en mathématiques fut mis à l'essai. En 1935, après le décès de Mme Putnam, l'Association mathématique américaine (MAA) prend en charge le concours.

Le concours Putnam se veut une mesure à la fois de l'originalité que de l'habileté technique de ses participants. On y rencontre des concepts un peu plus sophistiqués que ceux vus dans des cours de base de mathématiques, histoire d'apporter un peu de défi. Les problèmes présentés couvrent plusieurs domaines des mathématiques : notamment la théorie des groupes, la théorie des ensembles, la théorie des nombres, l'analyse, la combinatoire, l'arithmétique cardinale, la topologie, etc. Voici les particularités du concours :

- Le concours comporte 12 problèmes, séparés en deux séries de 6, soient les séries A et B.
- La série A se déroule en avant-midi, et la série B en après-midi.
- Chaque problème vaut 10 points, pour un total de 120 points.

– On demande toujours de justifier la démarche nécessaire à l'élaboration d'une réponse. L'exactitude aussi bien que la clarté et la concision sont évaluées. La réponse doit être parfaite (pas seulement exacte...) pour avoir 10 points.
– Une partie des points peut être allouée si le participant a montré un progrès significatif et substantiel vers la bonne solution.
– Plus de la moitié des participants obtiennent entre 0 et 3 sur 120, et le simple fait d'avoir plus que 0 est très bien.

Les 5 meilleurs participants sont désignés Putnam Fellows par la MAA et seront récipiendaires de prix. Des prix seront aussi attribués aux 20 participants suivants dans la liste des meilleurs. Enfin, le prix *Elizabeth Lowell Putnam* est accordé à la participante dont la performance est particulièrement méritoire.

Lors du concours, on peut participer en tant qu'individu mais on peu aussi être membre de l'équipe représentant l'université. Cette équipe comporte trois participants choisis avant le concours. Le pointage de l'équipe est la somme des pointages des trois participants. Si une équipe performe (5 premières places), ses membres ainsi que l'université reçoivent un prix en argent.

Cette année, c'est la 65e édition édition du concours qui aura lieu, probablement le samedi 4 décembre 2004. La date limite d'inscription pour l'Université de Sherbrooke sera à la mi-octobre.

Autres règlements :

(1) Ouvert aux étudiants de 1er cycle des collèges et universités des États-Unis et du Canada.

(2) Limite de 4 participations par personne.

(3) Aucune collaboration permise avec l'assistance.

(4) Les problèmes doivent être résolus individuellement par chaque participant.

(5) Deux périodes de 3 heures séparées par un entracte de 2 heures.

(6) 10h00 à 13h00 et 15h00 à 18h00 (heure normale de l'Est).

Nous allons maintenant voir une à une quelques stratégies de résolution, que certains appellent des *heuristiques* de résolution.

2. Théorie

On appelle *heuristique* toute stratégie de résolution de problèmes. On considérera ici plus particulièrement 10 types d'heuristiques, souvent utilisées lors de résolution de problèmes mathématiques :

(1) rechercher des patrons ;

(2) illustrer le problème ;

(3) formuler un problème équivalent ou modifier le problème ;

(4) choisir une notation efficace ;

(5) exploiter la symétrie ou la parité ;

(6) diviser en cas ;

(7) travailler à rebours ;

(8) argumenter par contradiction ;

(9) considérer les cas extrêmes ;

(10) généraliser le problème.

Étudier les techniques de résolution de problèmes que d'autres personnes ont utilisé peut s'avérer très inspirant pour résoudre à son tour des problèmes. On peut souvent réutiliser certaines idées en les adaptant à différents contextes. C'est pourquoi nous donnerons ici quelques exemples d'utilisation de chacun des types d'heuristiques présentés ci-haut. Il primordial de toujours de souvenir de ceci : presque tout problème admet plusieurs solutions. Les exemples présentés dans les prochaines sections pourraient donc être présentés à l'aide de plusieurs de techniques mentionnées plus haut. Ils ont été choisis à cause de leur bonne représentativité de la technique décrite.

2.1. **La recherche de patrons.**

Une des première règles à suivre lors de la résolution d'un problème est d'observer quelques exemples, afin de prendre le pouls du problème. Souvent cette seule méthode sera suffisante pour déclencher l'idée maîtresse de la preuve à fournir.

Exemple 2.1 (Putnam 1979)**.** *Soit $x_1, x_2, x_3, \ldots$ une suite de réels non nuls satisfaisant à*

$$x_n = \frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-1} - x_{n-1}}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots$$

Établir des conditions nécessaires et suffisantes sur x_1 et x_2 pour que x_n soit un nombre entier pour une infinité de valeurs de n.

<u>Solution</u>: Ce problème semble assez rébarbatif à première vue. Le premier réflexe devrait être d'observer quelques exemples de la définition récursive donné plus haut. Disons que x_1 et x_2 sont fixés. On veut voir comment se comportent les autres termes de la suite.

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{x_1x_2}{2x_1 - x_2}, \\ x_4 &= \frac{x_2x_3}{2x_2 - x_3} = \frac{x_2\frac{x_1x_2}{2x_1-x_2}}{2x_2 - \frac{x_1x_2}{2x_1-x_2}} = \frac{x_1x_2^2}{4x_1x_2 - 2x_2^2 - x_1x_2} = \frac{x_1x_2}{3x_1 - 2x_2}, \\ x_5 &= \frac{x_3x_4}{2x_3 - x_2} = \cdots = \frac{x_1x_2}{4x_1 - 3x_2}. \end{aligned}$$

Déjà avec ces trois termes, nous pouvons déceler la présence d'un patron de la forme

$$x_n = \frac{x_1x_2}{(n-1)x_1 - (n-2)x_2}.$$

Nous verrons plus tard des techniques permettant de confirmer notre intuition. Pour le moment, on l'accepte.

On peut aussi le récrire, en isolant le n au dénominateur, comme

$$x_n = \frac{x_1x_2}{(x_1 - x_2)n + (2x_2 - x_1)}.$$

Ainsi, si $x_1 = a$ et $x_2 = b$, on a

$$x_n = \frac{ab}{(a-b)n + (2b-a)}.$$

Il est alors évident que si $a \neq b$, plus n va augmenter, plus le dénominateur deviendra grand (en valeur absolue), de sorte que lorsqu'il sera plus grand le numérateur, on aura toujours une fraction $\frac{c}{d}$ avec $\left|\frac{c}{d}\right| < 1$. Dans ce cas, on ne peut donc pas avoir un nombre infini de x_n entiers. Il faut donc que $a = b$. Dans ce cas, $x_n = \frac{a^2}{2a-a} = a = x_1 = x_2$. On voit alors très bien que x_n

sera entier pour tout n, si $x_1 = x_2$ est un entier. En résumé, x_n est un entier pour une infinité de valeurs de n si et seulement si x_1 est entier et $x_2 = x_1$. $\square$

Exemple 2.2 (Olympiade internationale 1976)**.** *Trouver des nombres positifs (i.e. strictement supérieurs à 0) n et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tels ques $a_1 + \cdots + a_n = 1000$ et que le produit $a_1 a_2 \cdots a_n$ soit le plus grand possible.*

<u>Solution</u>: Ici, le problème prend une allure décourageant étant donné le grand nombre de possibilités à traiter. Lorsqu'un des paramètres donné rend la tâche plus ardue, on peut le modifier temporairement pour vérifier quelques exemples. Dans le cas qui nous occupe, c'est la condition $a_1 + \cdots + a_n = 1000$ qui alourdit notre recherche. On peut premièrement examiner ce qui se passe lorsque l'on remplace 1000 par $2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, \ldots$. On revient ensuite avec 1000 et l'on découvre quelques indices qui nous mèneront au résultat :

(1) aucun a_i ne peut excéder 4 : en effet, si $a_i > 4$ alors

$$a_i = \begin{cases} 2k + 1 = 3 + 2(k-1) & k \geq 1 \\ 2k \end{cases}$$

On pourrait alors remplacer a_i par les termes $3 + \overbrace{2 + \cdots + 2}^{k-1}$ ou $\overbrace{2 + \cdots + 2}^{k}$. On a encore $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1000$, mais alors, dans un cas

$$a_i = 3 + 2(k-1) < 2(k+1) \leq 2^k < 3 \cdot 2^{k-1}$$

et dans l'autre

$$a_i = 2k < 2^k$$

donc on vient d'augmenter le produit, contredisant sa maximalité.

(2) aucun a_i n'est égal à 1 : il est clair que cela contredirait encore la maximalité du produit ;

(3) tous les a_i peuvent être pris égaux à 2 ou 3 : en effet, on vient de montrer que $2 \leq a_i \leq 4$. Si $a_i = 4$ on peut l'écrire $a_i = 2 + 2$ et $2 \times 2 = 4 = a_i$, laissant le produit inchangé.

(4) au plus deux a_i seront égaux à 2 : en effet, s'il y en a au moins 3, on a $2 \times 2 \times 2 < 3 \times 3$ tout en conservant $2 + 2 + 2 = 3 + 3$, ce qui contredirait la maximalité du produit.

À l'aide de ces 4 observations et sachant que $1000 = 3 \times 332 + 2 + 2$, il suffit de prendre $n = 335$ et $a_1 = 2 = a_2$, $a_i = 3$ pour $i = 3, 4, \ldots, 335$. Ceci donne le produit maximal $3^{332} \times 2^2$. $\square$

2.2. **Illustrer le problème.**

Une autre méthode très efficace pour se plonger dans un problème est de le visualiser à l'aide de figures. Cette stratégie sera particulièrement efficace dans la plupart des problèmes de géométrie. Un schéma rend souvent plus facile l'assimilation des données du problème, en permettant de les visualiser d'un coup d'oeil. Souvent, aussi, il fera ressortir les liens entre les données.

Exemple 2.3. *Si a, b sont des entiers positifs sans facteur en commun, montrer que*

$$\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{2a}{b}\right] + \left[\frac{3a}{b}\right] + \cdots + \left[\frac{(b-1)a}{b}\right] = \frac{(a-1)(b-1)}{2},$$

où $[a]$ représente la partie entière de a.

<u>Solution</u>: Lorsque $b = 1$, on comprendra que la somme à gauche est 0, de sorte que le résultat tienne toujours.

Il n'est pas clair à première vue comment une illustration peut nous venir en aide ici. Ce qu'on sait, c'est que l'énoncé fait intervenir deux variables a, b, prenant des valeurs entières. On pourrait vouloir illustrer tous les couples de valeurs possibles (a, b). Un plan cartésien serait approprié dans ce cas : en fait, comme a, b prennent des valeurs entières, nous n'utiliserons que le treillis des entiers, c'est-à-dire un quadrillage aux coordonnées entières du plan cartésien. D'abord, on se construit un exemple simple pour voir les choses plus concrètement : fixons $a = 5$ et $b = 7$, qui n'ont pas de facteur en commun (à part 1). Associons l'axe des x à b et celui des y à a. Les points $P_k = (k, 5k/7)$, $k = 1, 2, \ldots, 6$ reposent tous sur la droite $y = 5x/7$. De plus, $\left[\frac{5k}{7}\right]$ représente le nombre de points à coordonnées entières sur le segment vertical entre P_k et l'axe des x. Notons $A = (0, 0)$, $B = (0, 5)$, $C = (7, 5)$ et $D = (7, 0)$. Ainsi $\sum_{k=1}^{6} \left[\frac{5k}{7}\right]$ nous donne le nombre de points du treillis qui se trouvent à l'intérieur (ce qui exclue la frontière) du triangle ABC. On voit assez aisément que ce nombre correspond à la moitié du nombre de points du treillis se trouvent à l'intérieur du rectangle $ABCD$. Or ayant fixé $a = 5$ et $b = 7$, on sait qu'il y a $4 \times 6 = 24$ points dans $ABCD$, donc 12 dans ABC.

On peut généraliser ce raisonnement. La condition que a, b n'ont aucun facteur en commun nous assure qu'aucun point du treillis à l'intérieur de $ABCD$ ne se retrouvera sur la droite $y = ax/b$. Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{b-1} \left[\frac{ka}{b}\right] &= \frac{1}{2}\left|\{P \mid P \text{ est un point du treillis à l'intérieur de } ABCD\}\right| \\ &= \frac{(a-1)(b-1)}{2}.\end{aligned}$$

□

Exemple 2.4 (Une généralisation du problème des poignées de mains, Crux Matematicorum, vol.6, no 8)**.** *M. et Mme Adams ont assisté dernièrement à une fête lors de laquelle trois autres couples étaient aussi présents. Plusieurs poignées de mains se sont données. Évidemment, personne n'a serré de la main de son époux/épouse, personne n'a serré la main d'un même personne plus d'une fois, et personne ne s'est lui-même serré la main.*

Après que tout ceci se soit déroulé, M. Adams à demandé à chaque personne, incluant sa conjointe, le nombre de mains qu'il ou elle avec serré. À sa grande surprise, chacun a donnée une réponse différente. Combien de mains M. Adams a-t-il serrées ce soir-là ?

<u>Solution</u>: Même si un diagramme n'est pas essentiel pour la résolution de ce problème, il est vraiment utile pour illustrer les données. Représentons chacun des invités par un point. Les réponses donnée à M. Adam doivent avoir été les nombres 0,1,2,3,4,5,6. Par conséquente, l'un des individus, disons A, a serré la main de 6 autres personne, disons B, C, D, E, F, G (donc H est conjoint de A). Indiquons ceci par des segments de droite entre les points associés à ces personnes.

À l'aide de ce diagramme, on voit que H est nécessairement la personne qui n'a serré aucune main le soir de la fête, tous les autres ayant serré au moins une main.

Maintenant, l'un de B, C, D, E, F, G a serré 5 mains. On peut supposer qu'il s'agit de B, quitte à renommer les sommets. On savait déjà qu'il avait serré la main de A. On peut supposer que les 4 autres personnes dont il a serré la main sont C, D, E, F. On voit alors sur le nouveau diagramme que G est nécessairement la personne qui a serré une seule main. Aussi, B et G sont nécessairement époux, car A et H le sont, et B a serré la main de tous les autres.

Comme ci-haut, on peut supposer sans perte de généralité que C a serré quatre mains, et que ce sont celles de A, B, D, E. Donc F est la personne ayant serré deux mains, et C, F sont époux. Par conséquents D, E sont époux.

On remarque que D et E ont tous deux serré trois mains. Puisque M. Adams n'a reçu que des nombres différents, D et E correspondent au couple Adams. Ainsi M. Adams a serré trois mains. $\square$

2.3. **Formuler un problème équivalent ou modifier le problème.**

Nous avons vu précédemment que la première chose à faire devant un problème est de recueillir les données, d'explorer quelques cas, d'émettre des hypothèse et d'analyser. Or dans certains cas, cela mène à trop de calculs, ou encore il est impossible d'observer de cas particuliers utiles. Une recommandation dans un tel cas est de tenter de reformuler le problème dans une forme équivalente, mais plus simple. Par exemple, on peut avoir recours à des manipulations trigonométriques, changements de variables, utilisations de bijections, réinterprétation dans un autres langage (algèbre, géométrie, analyse, combinatoire, etc.)

Exemple 2.5. *Trouver un terme général pour la n^e dérivée de $f(x) = 1/(1 - x^2)$.*

<u>Solution</u>: Souvent, il peut s'avérer utile de récrire une expression rationnelle comme somme de fractions partielles. Dans notre cas

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$$

et cette forme permet aisément d'obtenir le résultat

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right).$$

$\square$

Exemple 2.6 (Mathematics magazine, vol.49, no 4)**.** *Étant donné un entier positif (> 0), trouver le nombre de quadruplets d'entiers (a, b, c, d) tels que $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq n$.*

<u>Solution</u>: L'idée maîtresse qui permet de rendre le problème plus transparent est de remarquer qu'il y a une bijection entre les quadruplets cherchés et les sous-ensembles de 4 objets pris dans $\{0, 1, \ldots, n+3\}$. En effet, soit (a, b, c, d) tel que $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq n$. On lui associe le sous-ensemble $\{a, b+1, c+2, d+3\}$. Il est facile de voir que cette correspondance est bijective : chaque quadruplet correspond à exactement un sous-ensemble de quatre éléments, et vice-versa. Ainsi le nombre de quadruplets est $\binom{n+4}{4}$. $\square$

Exemple 2.7 (Mathematical Spectrum, vol.2, no 2)**.** *Le nombre 5 peut être exprimé comme une somme de 3 entiers naturels de 6 façons, en considérant l'ordre de ces entiers, c'est-à-dire :* $5 = 1+1+3 = 1+3+1 = 3+1+1 = 1+2+2 = 2+1+2 = 2+2+1$. *Soient $m \leq n$ des entiers naturels. De combien de façons peut-on écrire n comme somme de m entiers naturels, considérant l'ordre ?*

<u>Solution</u>: Écrivons

$$n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n}.$$

Le nombre que nous cherchons est le nombre de façons de choisir $m-1$ signes $+$ parmi les $n-1$ ci-haut. En effet, ce faisant, on partitionne le nombre n est $m-1$ paquets de 1, c'est-à-dire en $m-1$ entiers naturels (somme des 1 dans chaque paquet). Il y a donc $\binom{n-1}{m-1}$ possibilités. $\square$

Exemple 2.8. *Étant donné des nombres positifs a, b, c, d, montrer que*
$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}+\frac{b^3+c^3+d^3}{b+c+d}+\frac{c^3+d^3+a^3}{c+d+a}+\frac{d^3+a^3+b^3}{d+a+b} \geq a^2+b^2+c^2+d^2.$$

<u>Solution</u>: Première observation : il y a de la symétrie dans ce problème. En effet, si on permute les rôles de deux lettres, disons a et b, le problème reste le même. Ceci nous permet de considérer un problème plus simple, dont le résultat nous permettra de résoudre le nôtre. Si on parvient à montrer que pour des entiers positifs x, y, z on a
$$\frac{x^3+y^3+z^3}{x+y+z} \geq \frac{x^2+y^2+z^2}{3}$$
on aura terminé, car alors le membre de gauche de l'inégalité de l'énoncé est plus grand ou égal à
$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}+\frac{b^2+c^2+d^2}{3}+\frac{c^2+d^2+a^2}{3}+\frac{d^2+a^2+b^2}{3} = a^2+b^2+c^2+d^2.$$
Maintenant, pour montrer le problème simple, on peut supposer sans perte de généralité que $x+y+z=1$. En effet, si ce n'est pas le cas, il suffit de diviser chaque membre de l'inégalité par $(x+y+z)^2$ et de poser $X = \frac{x}{x+y+z}$, $Y = \frac{y}{x+y+z}$ et $Z = \frac{z}{x+y+z}$.

Maintenant le problème original se réduit au problème modifié : étant donné des entiers positifs X, Y, Z tels que $X+Y+Z=1$, montrer que
$$X^3+Y^3+Z^3 \geq \frac{X^2+Y^2+Z^2}{3}.$$
□

2.4. **Choisir une notation efficace.**

Une autre étape importante de la résolution est de traduire le problème en termes symboliques.

Exemple 2.9. (a) *Si n est un entier positif tel que $2n+1$ est un carré parfait, montrer que $n+1$ est la somme de deux carrés parfaits successifs.*

(b) *Si $3n+1$ est un carré parfait, montrer que n_1 est la somme de trois carrés parfaits.*

<u>Solution</u>: En introduisant une notation judicieuse, le problème devient un simple problème d'algèbre.

(a) Supposons que $2n+1 = s^2$ avec s entier. Comme s^2 est impair, s lui-même doit l'être. On peut donc écrire $s = 2t+1$ pour un entier t. Ainsi $2n+1 = (2t+1)^2 = 4t^2+4t+1$, d'où $n = 2t^2+2t = t^2+(t+1)^2-1$. Donc $n+1$ est bien la somme de deux carrés consécutifs.

(b) Supposons que $3n+1 = s^2$. Il est clair que s n'est pas un multiple de 3, donc $s = 3t \pm 1$ pour un entier t. Alors $3n+1 = (3t \pm 1)^2$ et donc
$$n = \frac{(3t \pm 1)^2 - 1}{3} = \frac{9t^2 \pm 6t}{3} = 3t^2 \pm 2t.$$
Donc $n+1 = 3t^2 \pm 2t + 1 = 2t^2 + (t \pm 1)^2 = t^2 + t^2 + (t \pm 1)^2$. □

Exemple 2.10 (American mathematical monthly, vol.87, no 6)**.** *Soit $-1 < a_0 < 1$ et définissons récursivement*
$$a_n = \left(\frac{1+a_{n-1}}{2}\right)^{1/2}, \quad n > 0.$$
Soit $A_n = 4^n(1-a_n)$. Qu'arrive-t-il à A_n lorsqu'on fait tendre n vers l'infini ?

<u>Solution</u>: Essayer d'exprimer a_n en fonction de a_0 mène à des calculs désespérément complexes et inefficaces. L'obersvation clé ici est qu'il existe un unique angle $0 < \theta < \pi$ tel que $a_0 = \cos\theta$. Pour ce θ,

$$a_1 = \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^{1/2} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

De la même façon

$$a_2 = \left(\frac{1+\cos(\theta/2)}{2}\right)^{1/2} = \cos\left(\frac{\theta}{4}\right), \quad \cdots \quad, a_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right).$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} A_n &= 4^n\left(1-\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right) \\ &= \frac{4^n\left(1-\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)\left(1+\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)}{1+\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \\ &= \frac{4^n\sin^2(\theta/2^n)}{1+\cos(\theta/2^n)} \\ &= \left(\frac{\theta^2}{1+\cos(\theta/2^n)}\right)\left(\frac{\sin(\theta/2^n)}{\theta/2^n}\right)^2. \end{aligned}$$

Si n devient grand, alors $\theta^2/(1+\cos(\theta/2))$ s'approche de $\theta^2/2$ et $\sin(\theta/2^n)/(\theta/2^n)$ s'approche de 1 (on se rappelle que $\sin x/x \to 1$ quand $x \to 0$), et donc A_n converge vers $\theta^2/2$ lors que n tend vers l'infini. $\square$

2.5. **Exploiter la symétrie ou la parité ;**

La présence de symétrie ou de parité dans un problème permet souvent de réduire la difficulté de sa résolution.

Par exemple, pour la symétrie, si on considère le produit

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

on remarque que chaque facteur est symétrique en a, b, c (c'est-à-dire que si on les permute, ça ne change rien), le produit le sera aussi. Donc si a^3 apparaît dans le produit développé, il en sera de même pour b^3, c^3. De même si a^2b apparaît, on aura aussi $a^2c, b^2a, b^2c, c^2a, c^2b$, tous avec le même coefficient. Ce produit aura donc la forme

$$A(a^3+b^3+c^3) + B(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b) + C(abc).$$

Enfin, on obtient facilement $A = 1, B = 0$ et $C = -3$.

Exemple 2.11 (Putnam 1980)**.** *Évaluer*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}.$$

<u>Solution</u>: Ici, aucune technique usuelle d'intégration ne fonctionne. Or on peut remarquer que l'intégrande est symétrique autour du point $(\pi/4, 1/2)$. En effet, posons $f(x) = \frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}$. On

veut montrer que $f(x) + f(\pi/2 - x) = 1$ pour tout $0 \le x \le \pi/2$. Posant $r = \sqrt{2}$, on a

$$\begin{aligned} f(\pi/2 - x) + f(x) &= \frac{1}{1 + \tan^r(\pi/2 - x)} + \frac{1}{1 + \tan^r x} \\ &= \frac{1}{1 + \cot^r x} + \frac{1}{1 + \tan^r x} \\ &= \frac{\tan^r x}{1 + \tan^r x} + \frac{1}{1 + \tan^r x} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Il suit alors de cette symétrie que l'aire de la courbe sur $[0, \pi/2]$ est la moitié de l'aire du rectangle $[0, \pi/2] \times [0, 1]$, c'est-à-dire $(\pi/2)/2 = \pi/4$. □

Voici un exemple où l'on tire profit de la parité.

Exemple 2.12. *On place un chevalier sur chaque carré d'un échiquier* 7×7*. Est-il possible pour chaque chevalier de faire un mouvement légal, simultanément ?*

<u>Solution</u>: Supposons que l'échiquier est coloré comme à l'habitude. Il y a 49 cases ; supposons que 24 sont blanches et 25, noires. C'est ce qui nous sert de parité. Considérons les 25 chevaliers placés sur les cases noires. S'ils pouvaient tous faire un mouvement légal en même temps, ils devraient tous aller sur une case blanche. Or il n'y a que 24 cases blanches, donc c'est impossible. □

2.6. **Diviser en cas.**

Souvent, un problème peut se diviser en plusieurs sous-problèmes, chacun pouvant être traité séparément. Par exemple, si l'on doit démontrer un énoncé « pour tout nombre entier », on peut le montrer d'abord pour les positifs, ensuite pour les négatifs, ou encore pour les pairs, et les impairs.

Exemple 2.13. *Une fonction à valeurs réelles f, définie sur les nombres rationnels, satisfait à*

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

pour tous x, y rationnels. Montrer que $f(x) = f(1) \cdot x$ pour tout x rationnel.

<u>Solution</u>: Nous allons procéder par 4 étapes : d'abord pour les entiers positifs, ensuite les entiers non-positifs, puis les inverses d'entiers, et finalement les rationnels en général.

Cas 1: [entiers positifs] Le résultat est clair pour $x = 1$. Pour $x = 2$, on a $f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$. Pour $x = 3$, on a $f(3) = f(2 + 1) = f(2) + f(1) = 3f(1)$. On peut répéter cette idée pour tout entier n et obtenir $f(n) = nf(1)$. [Nous verrons plus tard qu'il s'agit ici d'une récurrence]

Cas 2: [entiers non-positifs] D'abord, $f(0) = f(0+0) = f(0)+f(0)$ donc $f(0) = 0 = 0 \cdot f(1)$. Ensuite $0 = f(0) = f(1 - 1) = f(1) + f(-1)$ donc $f(-1) = -f(1)$. De même, pour tout $n \ge 0$, on a $0 = f(0) = f(n - n) = f(n) + f(-n)$, donc $f(-n) = -nf(1)$.

Cas 3: [inverses d'entiers] Pour $x = \frac{1}{2}$, on a $f(1) = f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}) = 2f(\frac{1}{2})$ d'où, divisant chaque membre par 2, on obtient $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}f(1)$. Aussi, on a $f(1) = f(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}) = 3f(\frac{1}{3})$, ce qui donne $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}f(1)$. On procède de la même façon pour $x = \frac{1}{n}$. Si n est négatif, l'argument ci-haut fonctionne toujours : $0 = f(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n}) + f(-\frac{1}{n})$.

Cas 4: [tous les rationnels] Soit n un entier. Alors $f(\frac{2}{n}) = f(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}) = 2f(\frac{1}{n}) = \frac{2}{n}f(1)$. Similairement

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{m \text{ fois}}\right) = \underbrace{f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{n}\right)}_{m \text{ fois}} = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n}f(1).$$

□

2.7. Travailler à rebours.

Par « travailler à rebours », on veut dire travailler en supposant la conclusion vraie, jusqu'à ce qu'on arrive à quelque chose de facile à montrer. Pour construire la preuve finale, il suffit d'inverser chaque étape. Il faut faire attention, car dans certains cas, les étapes ne s'inversent pas directement. Par exemple, si on veut résoudre l'équation $\sqrt{x+1} = \sqrt{x-1} + 2$, on suppose que x la satisfait, on élève au carré chaque membre, ce qui donne $x+1 = x-1+4\sqrt{x-1}+4$, ce qui se récrit $\sqrt{x-1} = -\frac{1}{2}$. En élevant encore au carré, on a $x = \frac{5}{4}$. Donc s'il existe une solution, ce doit être $\frac{5}{4}$, or on remarque que ce n'en est pas une. En fait, à l'étape $\sqrt{x-1} = -\frac{1}{2}$, on aurait dû tout de suite remarquer qu'il n'y avait pas de solution.

Exemple 2.14. *Soit α un réel fixé avec $0 < \alpha < \pi$, et soit*

$$F(\theta) = \frac{\sin\theta + \sin(\theta+\alpha)}{\cos\theta - \cos(\theta+\alpha)}, \qquad 0 \le \theta \le \pi - \alpha.$$

Montrer que F est constante.

<u>Solution</u>: Supposons que F est une constante. Alors $F(\theta) = F(0)$ pour tout θ avec $0 \le \theta \le \pi - \alpha$. Ainsi

$$\frac{\sin\theta + \sin(\theta+\alpha)}{\cos\theta - \cos(\theta+\alpha)} = F(\theta) = F(0) = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}. \tag{2.1}$$

$$\big(\sin\theta + \sin(\theta+\alpha)\big)(1-\cos\alpha) = \sin\alpha\big(\cos\theta - \cos(\theta+\alpha)\big) \tag{2.2}$$

$$\sin\theta + \sin(\theta+\alpha) - \sin\theta\cos\alpha - \sin(\theta+\alpha)\cos\alpha = \sin\alpha\cos\theta - \sin\alpha\cos(\theta+\alpha) \tag{2.3}$$

$$\sin\theta + \sin(\theta+\alpha) - \big(\sin\theta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\theta\big) - \big(\sin(\theta+\alpha)\cos\alpha - \sin\alpha\cos(\theta+\alpha)\big) = 0 \tag{2.4}$$

$$\sin\theta + \sin(\theta+\alpha) - \sin(\theta+\alpha) - \sin(\theta+\alpha-\alpha) = 0 \tag{2.5}$$

La dernière équation est triviale. Pour construire la preuve, on doit renverser les étapes. Il faut se questionner sur l'étape (2) vers (1) : la preuve est valide seulement si l'on ne divise pas par zéro. Or $(1-\cos\alpha) \neq 0$ puisque $0 < \alpha < \pi$, et $\cos\theta - \cos(\theta+\alpha) > 0$ puisque $0 \le \theta < \theta + \alpha \le \pi$. □

2.8. Argumenter par contradiction.

Argumenter par contradiction (ou par l'absurde) signifie de supposer que la conclusion est fausse, et d'obtenir alors des déductions menant à quelque chose en contradiction avec l'hypothèse, ou encore une absurdité comme $0 > 1$. Par exemple, pour montrer que la série harmonique diverge : supposons qu'elle converge vers r. Alors

$$\begin{aligned} r &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \cdots \\ &> \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots \\ &= \ 1 \ + \ \frac{1}{2} \ + \ \frac{1}{3} \ + \ \frac{1}{4} \ + \ \cdots \\ &= r, \end{aligned}$$

une absurdité. On doit donc conclure que la série harmonique diverge.

Exemple 2.15 (Olympiade hongroise 1907)**.** *Étant donnés des entiers impairs a, b, c, montrer que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ne peut avoir de racine rationnelle.*

Solution: Supposons que p/q soit une racine rationnelle. On peut supposer sans perte de généralité que p, q ne sont pas tous les deux pairs. Nous montrerons d'abord qu'aucun d'eux ne peut être pair. En effet, si p est pair, alors $a(p/q)^2 + b(p/q) + c = 0$ nous donne $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$. Comme $ap^2 + bpq$ est pair, cq^2 doit l'être aussi, ce qui est impossible puisque c, q sont impairs. On obtient une contradiction similaire si l'on suppose plutôt que q est pair. Donc p, q sont tous deux impairs, et $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$. Or ceci donnerait une somme de trois impairs qui serait paire, une absurdité. Donc l'équation n'admet aucun racine rationnelle.

2.9. **Considérer les cas extrêmes.**

Lorsqu'on approche un problème, il peut s'avérer utile d'observer ce qui se passe si l'on remplace l'un des paramètres par une de ses bornes, fixées dans l'énoncé, ou encore en prenant une valeur minimale, ou maximale.

Exemple 2.16. *Montrer que le produit de n entiers consécutifs est toujours divisible par $n!$.*

Solution: D'abord, remarquons qu'il suffit de prouver le résultat pour n entiers positifs consécutifs. En effet, si l'un des entier est 0, le résultat est clair. S'ils sont tous négatifs, on peut se ramener au cas positif, puisque la relation de divisibilité demeure la même. On suppose donc, par contradiction, qu'il existe des n tels qu'on ait n entiers positifs consécutifs dont le produit n'est pas divisible par $n!$. Soit N le plus petit de tous ces n. On remarque que $N > 2$, puisque le produit de deux entiers consécutifs est toujours pair. On suppose donc l'existence d'un entier non-négatif m tel que

$$(m+1)(m+2)\cdots(m+N-1)(m+N)$$

n'est pas divisible par $N!$. De tous les tels nombres m, soit M le plus petit. Remarquons que $M > 0$, parce que $N!$ est bien sûr divisible par $N!$. Maintenant on a

$$\begin{aligned} &(M+1)(M+2)\cdots(M+N-1)(M+N) \\ &\qquad = M\big((M+1)(M+2)\cdots(M+N-1)\big) \\ &\qquad\quad + N\big((M+1)(M+2)\cdots(M+N-1)\big) \end{aligned}$$

Par notre choix de M, on a que $N!$ divise $M\big((M+1)(M+2)\cdots(M+N-1)\big)$. Aussi, par notre choix de N, $(N-1)!$ divise $(M+1)(M+2)\cdots(M+N-1)$, et par conséquent, $N!$ divise $N\big((M+1)(M+2)\cdots(M+N-1)\big)$. En combinant ceci, on a montré que $N!$ divise le membre de droit de l'équation ci-haut, ce qui contredit notre hypothèse. $\square$

2.10. **Généraliser le problème.**

Parfois, un contexte plus général nous donne un meilleur point de vue du problème en éliminant quelques aspects non nécessaires.

Exemple 2.17. *Évaluer la somme* $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k}$.

<u>Solution</u>: Nous allons plutôt évaluer la somme $S(x) = \sum_{k=1}^{n} k^2 x^k$, et ensuite calculer $S(\frac{1}{2})$. En introduisant une nouvelle variable x, on peut utiliser les techniques d'analyse. On a

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad x \neq 1.$$

En dérivant chaque membre, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} &= \frac{(1-x)\big(-(n+1)x^n\big) + (1 - x^{n+1})}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

On multiplie alors chaque côté par x, et on dérive une autre fois, et on multiplie de nouveau par x pour obtenir

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} k^2 x^2 = \frac{x(1+x) - x^{n+1}(nx - n - 1)^2 - x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} S(\frac{1}{2}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k} &= 6 - \frac{1}{2^{n-1}}(\frac{1}{2}n - n - 1)^2 - \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 6 - \left(\frac{n^2 + 4n + 6}{2^n}\right). \end{aligned}$$

□

Exemple 2.18. *Évaluer le déterminant suivant (le déterminant de Vandermonde)*

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

<u>Solution</u>: Nous allons supposer que $a_i \neq a_j$ pour $i \neq j$, car sinon le déterminant est nul. Pour se concentrer davantage sur l'idée maîtresse, considérons le cas $n = 3$:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}.$$

Dans ce déterminant, remplaçons c par la variable x. Alors, le déterminant est un polynôme $P(x)$ de degré 2. De plus $P(a) = 0 = P(b)$, donc $P = A(x-a)(x-c)$, pour une constante A. Maintenant A est le coefficient de x^2, et retournant dans la matrice, ce coefficient est

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{bmatrix} = b - a.$$

Donc $A = b - a$ et le déterminant original était $P(c) = (b-a)(c-a)(c-b)$. Le cas général est semblable. Soit D_n le déterminant, ou n est l'ordre de la matrice. Remplaçons les a_n de la ligne du bas par la variable x. Le déterminant de la matrice obtenue est alors un polynôme $P_n(x)$ de degré $n-1$, qui s'annule en $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Donc, $P_n(x) = A(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1}$, avec A une constante. Comme ci-haut, A est le coefficient de x^n, qui correspond au déterminant D_{n-1}. Ainsi

$$D_n = P_n(a_n) = D_{n-1}(a_n - a_1)(a_n - a_2)\cdots(a_n - a_{n-1}).$$

On peut répéter cet argument pour D_{n-1}, etc. Le résultat final sera

$$D_n = \prod_{k=2}^{n}\left(\prod_{i=1}^{k-1}(a_k - a_i)\right).$$

□

Exemple 2.19. *Sachant que* $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2}\pi$, *évaluer* $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$.

<u>Solution</u>: Nous allons évaluer l'intégrale plus générale

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{\sin^2 ax}{x^2}dx, \qquad a \geq 0,$$

en utilisant une technique appelée la dérivation de paramètre. On dérive chaque membre de l'équation précédent par rapport à a

$$I'(a) = \int_0^\infty \frac{2\sin ax \cos ax \cdot x}{x^2}dx = \int_0^\infty \frac{\sin 2ax}{x}dx.$$

Maintenant, avec $y = 2ax$, on a $dy = 2adx$ et

$$I'(a) = \int_0^\infty \frac{\sin y}{y}dy = \frac{1}{2}\pi.$$

En intégrant chaque côté, par rapport à a, on obtient

$$I(a) = \frac{1}{2}\pi a + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Puisque $I(0) = 0$, on a $C = 0$. Ainsi $I(a) = \frac{1}{2}\pi a \geq 0$. Posant $a = 1$ donne $I(1) = \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{1}{2}\pi$. □

3. Problèmes choisis sur la résolution de problèmes

Pour les problèmes suivants, on ne demande pas nécessaire d'écrire une démonstration rigoureuse : les prochains chapitres y sont consacrés. Ici on demande d'essayer plusieurs exemples, de recherche des patrons, de formuler des conjectures et de déterminer comment l'heuristique proposée peut permettre résoudre le problème. Le dernier groupe de problème permettra d'améliorer votre intuition dans le choix d'heuristique.

3.1. **Recherche de patrons.**

3.1.1. Soit S un ensemble avec une opération binaire $*$ satisfaisant aux deux lois

(1) $x * x = x$ pour tout $x \in S$;

(2) $(x * y) * z = (y * z) * x$ pour tous $x, y, z \in S$.

Montrer que $*$ est commutative, c'est-à-dire que $x * y = y * x$ pour tous $x, y \in S$.

3.1.2. La suite de chiffres (i.e. 0,1,2,3,4,5,6,8 ou 9) suivante est construire à partir de 2 et 7 en multipliant chaque paire de termes successifs et en ajoutant les chiffres composant ce produit comme termes suivants dans la suite :

$$2, 7, 1, 4, 7, 4, 2, 8, \ldots.$$

Montrer que le chiffre 6 apparaît un nombre infini de fois dans la suite.

3.1.3. Soit S_1 la suite de entiers positifs $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ and définissons la suite S_{n+1} à l'aide de S_n en ajoutant 1 à tous les entiers de la suite S_n qui sont divisibles par n. Ainsi, par exemple, $S_2 = 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ puisque tout entier est divisible par 1. Aussi $S_3 = 3, 3, 5, 5, 7, 7, \ldots$. Déterminer les entiers n ayant la propriété que les premiers $n-1$ termes de S_n sont n.

3.1.4. Déterminer les nombre de coefficients binomiaux impairs dans l'expansion de $(x+y)^{1000}$.

3.2. **Illustrer le problème.**

3.2.1. Deux mâts verticaux, de hauteurs a et b, sont à une distance d l'un de l'autre (selon la ligne du sol, horizontale). Un homme choisit un point P sur le sol, et attache une corde du sommet de chaque mât, vers le point P. Où devrait se trouver le point P pour minimiser la longueur totale de corde utilisée ?

3.2.2. Une chambre rectangulaire mesure 30 pieds de longueur, 12 pieds de haut et les petits murs de cette chambres ont 12 pieds de large. Une mouche avec une aile cassée se repose à un point situé à 1 pied du plafond, au centre d'un des petits murs. Un morceau de nourriture se trouve à 1 pied du plancher, au milieu du petit mur opposé à celui où est la mouche. La mouche n'a assez d'énergie que pour se déplacer de 40 pieds (elle ne peut voler). Montrer qu'il existe un chemin qu'elle peut suivre pour se rendre à la nourriture en 40 pieds.

3.3. **Formuler un problème équivalent ou modifier le problème.**

3.3.1. Pour quelles valeurs de a est-ce que le system d'équation

$$x^2 = y^2,$$
$$(x-a)^2 + y^2 = 1$$

admet exactement zéro, une, deux, trois, quatre solutions, respectivement ?

3.3.2. En trouvant l'aire d'un triangle de deux manières différents, montrer que si p_1, p_2, p_3 sont les hauteurs d'un triangle et r le rayon du cercle inscrit, alors

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = \frac{1}{r}.$$

3.3.3. Utiliser un argument de dénombrement pour montrer que pour des entiers $0 < r \leq n$, on a

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

3.4. **Choisir une notation efficace.**

3.4.1. Un théorème connu nous donne qu'un nombre premier $p > 2$ peut s'écrire comme somme de deux carrés parfaits ($p = m^2 + n^2$) si et seulement si p est un de plus qu'un multiple de 4. Acceptant ce résultat, montrer que :

(a) tout nombre premier qui est un de plus qu'un multiple de 8 peut s'écrire $p = x^2 + 16y^2$ avec des entiers x, y ;

(b) tout nombre premier qui est 5 de plus qu'un multiple de 8 peut s'écrire $p = (2x+y)^2 + 4y^2$ avec des entiers x, y.

3.5. **Exploiter la symétrie ou la parité.**

3.5.1. Développer le produit $(x^2y + y^2z + z^2x)(xy^2 + yz^2 + zx^2)$.

3.5.2. On place un chevalier sur un échiquier $4 \times n$. Est-il possible, en $4n$ mouvement consécutifs de chevaliers, de visiter chaque case et de retourner au point de départ ?

3.5.3. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ un arrangement arbitraire des nombres $1, 2, \ldots, n$. Montrer que si n est impaire, alors le produit

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$$

est pair.

3.6. **Diviser en cas.**

3.6.1. (a) Montrer que pour tous réels x, y, $|x + y| \leq |x| + |y|$.

(b) Montrer que pour tous réels x, y, z, $|x - y| \leq |x - z| + |y - z|$.

3.6.2. Une fonction f à valeurs réelles, définie sur les rationnels positifs, satisfait à $f(x + y) = f(x)f(y)$ pour tous rationnels positifs x, y. Montrer que $f(x) = \big(f(1)\big)^x$.

3.7. **Travailler à rebours.**

3.7.1. Si a, b, c sont les longueurs des côtés d'un triangle, montrer que

$$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 \leq 4(ab + bc + ca).$$

3.7.2. (a) Étant donnés des réels positifs x, y montrer que

$$\frac{2}{1/x + 1/y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2}.$$

(b) Étant donnés des réels a, b tels que $a + b = 1$, montrer que

$$\frac{2}{a/x + b/y} \leq ax + by, \qquad \text{pour tous } x > 0,\ y > 0.$$

3.8. **Argumenter par contradiction.**

3.8.1. Dans une soirée où 2000 personnes ont été invitées, parmi n'importe quel ensemble de 4 personnes, il y en a une qui connaît les 3 autres. On sait qu'il y a 3 personnes qui ne se connaissent pas mutuellement (on suppose ici que si A connaît B, alors B connaît aussi A). Montrer que les 1997 autres personnes connaissent tous les invités au party.

3.9. **Considérer les cas extrêmes.**

3.9.1. Soit $f(x)$ un polynôme de degré n avec des coefficients réels et tel que $f(x) \geq 0$ pour tout nombre réel x. Montrer que $f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(n)}(x) \geq 0$ pour tout x.

3.10. **Généraliser le problème.**

3.10.1. Grâce à la technique de dérivation d'un paramètre, évaluer $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx$. (Indice : considérer $H(m) = \int_0^1 \frac{(x^m - 1)}{\ln x} dx$.

3.10.2. Lequel de ces nombre est le plus grand, $\sqrt[3]{60}$ ou $2 + \sqrt[3]{7}$? (Indice : élever au cube mène à des complications difficiles à résoudre. Considérer le problème plus général : lequel est le plus grand, $\sqrt[3]{4(x + y)}$ ou $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$, avec $x, y \geq 0$. Prendre ensuite $x = a^3$ et $y = b^3$.)

3.11. **Problèmes supplémentaires.**

3.11.1. Si (a_n) est une suite telle que pour $n \geq 1$ on a $(2 - a_n)a_{n+1} = 1$, qu'arrive-t-il à a_n lors que n tend vers l'infini ?

3.11.2. Montrer qu'il n'existe pas d'entiers positifs a, b, c et n tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 2^n abc$.

Soit S un ensemble muni d'un opération binaire $*$ satisfaisant aux lois

(1) $x * (x * y) = y$ pour tous $x, y \in S$;

(2) $(y * x) * x = y$ pour tous $x, y \in S$.

Montrer que $x * y = y * x$ pour tous $x, y \in S$.

3.11.3. Déterminer $F(x)$ si, pour tous réels x, y, on a $F(x)F(y) - F(xy) = x + y$.

3.11.4. Montrer qu'il n'existe pas d'entiers positifs x, y, z tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz.$$

Évaluer $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

3.11.5. Voici les règles d'un jeu : on lance un dé, en notant chaque fois le i-ème résultat r_i, jusqu'à ce que le total des résultats obtenus soit plus grand ou égal à 100. On remplace le dernier résultat r_n par $r'_n = 106 - sum_{i=1}^n r_i$, de sorte que le total des résultats soit bien 100. Le pointage pour cette partie est alors le produit des résultats $r_1 r_2 \cdots r_{n-1} r'_n$.

(a) Quel est le pointage maximal que l'on peut obtenir ?

(b) Quelle est la probabilité d'obtenir le pointage maximal ?

3.11.6. Montrer que $(2^a - 1)(2^b - 1) = 2^{2^c} + 1$ est impossible avec des entiers non-négatifs a, b, c. (Indice : développer le produit et explorer les possibilités pour a, b, c.)

3.11.7. Montrer que $x^2 - y^2 = a^3$ admet toujours une solution entière pour x et y, lorsque a est un entier positif.

L'impression de ce document a été rendue possible grâce au Département de mathématiques et au Fonds institutionnel de soutien aux activités étudiantes de l'Université de Sherbrooke.