Concours Putnam

Atelier de Pratique

Le mardi, 3 octobre 12h30-13h30

Jeus et invariants

1. Let $s(n)$ be the sum of the digits of n written in binary. Find all integer n for which $n + s(n) + s(s(n)) = 1000$.

   Remark 1 *If we were working in base* 10 *there would be no solutions. Indeed, since* $s(n) \equiv n \pmod 3$ *we would have* $1000 \equiv n + n + s(n) \equiv 3n \equiv 0 \pmod 3$ *which is impossible.*

Solution: In base 2 it is a bit harder. (Here 1000 is in base 10, which might be somewhat confusing.) Since $1000 < 2^{10} = 1024$ and $n < 1000$, n has at most 10 binary digits. Hence $s(n) \leq 10$. Actually $s(n) \leq 9$, since if $s(n) = 10$ then all digits are 1, and hence $n = 2^{10} - 1 = 1023 > 1000$. Moreover $s(s(n)) \leq 3$, which is attained only if $s(n) = 7$.

We claim that $s = s(n) \geq 6$. Write $s(n) = 10 - k$. Then

$$n \leq 2^{10} - 2^k,$$

which corresponds to s digits equal to 1 followed by k digits 0. Hence

$$1000 = n + 10 - k + s(s) \leq 2^{10} - 2^k + 10 - k + s(s),$$

$$k + 2^k \leq 34 + s(s).$$

Since $34 + s(s) \leq 37$, this yields $k \leq 5$. However, if $k = 5$, then $s = 5$, hence $s(s) = 2$, so we get

$$5 + 2^5 \leq 36,$$

which is impossible. Therefore $k \leq 4$ or $s \geq 6$.

In total we get $6 \leq s(n) \leq 9$, $1 \leq s(s(n)) \leq 3$. Hence $988 = 1000 - 12 \leq n \leq 1000 - 7 = 993$.

We can check the remaining 6 numbers (or the four possible values $s = 6, 7, 8, 9$.) directly and find that the unique solution is $n = 991$

Another way to finish the argument

We can observe that n must start with at least 4 digits 1, since otherwise $n \leq 2^{10} - 2^7 + 2^6 - 1 = 1024 - 64 = 959 < 1000 - 9 - 3$. Hence

$$n \geq 2^{10} - 2^6 + 2^{s-4} + ... + 1 = 2^{10} - 2^6 + 2^{s-3} - 1,$$

so

$$1000 = n + s + s(s) \geq 2^{10} - 2^6 + 2^{s-3} - 1 + s + s(s) = 959 + 2^{s-3} + s + s(s)$$

So

$$2^{s-3} + s + s(s) \leq 41.$$

Hence $s \leq 8$ and for $s = 8$ we get equality which gives a solution $n = 991$ (here $s(n) = 8, s(s(n)) = 1$). Moreover, all other n with $s(n) = 8$ have $n + s(n) + s(s(n)) > 1000$.

If $s = 6, 7$ there are no solutions. In this case the first 5 digits must be 1 as otherwise we get $n \leq 2^{10} - 2^6 + 2^4 + 2^3 = 984 < 1000 - 7 - 3 = 990$.Then

$$1000 - s - s(s) \geq n \geq 2^{10} - 2^5 + 2^{s-5} - 1$$

but for $s = 6, 7$ we have $1000 - s - s(s) \leq 992$ and $2^{10} - 2^5 + 2^{s-5} - 1 \geq 993$ (both bounds are obtained for s=6).

2. C'est un jeu à deux joueurs. Au départ, il y a un grand nombre de jetons de jeu sur la table. Chaque joueur à son tour peut retirer entre 1 et 10 jetons. Le perdant est la personne qui est obligée de prendre le dernier jeton. Donnez une stratégie pour que le premier joueur gagne si nous commencons avec 99 jetons; et une stratégie pour que le deuxième joueur gagne si on commence avec 100 jetons.

Solution: La clé est de travailler mod 11. Supposons que le nombre de jetons soit N et que le joueur A soit au tour. Si $N \equiv 1 \bmod 11$ et que le joueur A prend m jetons avec $1 \leq m \leq 10$, alors le joueur B prend $11 - m$ jetons de sorte qu'il reste $N - 11$ jetons, ce qui est à nouveau $\equiv 1 \bmod 11$. On continue à faire cela jusqu'à ce qu'il reste 1 jeton. Ainsi, si nous commencons avec 100 jetons, le premier joueur peut être contraint de perdre. Si nous commencons avec 99 jetons, le premier joueur prend 10 pour quitter $89 \equiv 1 \bmod 11$, et ainsi le deuxième joueur peut être forcé de perdre par la même stratégie.

3. Borgov place des évêques blancs, et Beth Harmon place à son tour des évêques noirs sur un échiquier, en commencant par le blanc, de sorte qu'un nouvel évêque ne peut être placé sur une carré que s'il ne peut pas être " pris " par un évêque de l'autre couleur, déjà sur l'échiquier. Un joueur perd s'il ne peut pas placer d'évêque sur le plateau pendant son tour. Donnez une stratégie à Beth Harmon pour gagner.

Solution: Symétrie. Supposons que les carrés de l'échiquier soient étiquetés en coordonnées $\{1, ..., 8\} \times \{1, ..., 8\}$. Si Borgov joue un évêque à (m, n) alors Harmon répond à $(9 - m, n)$. Vous devriez réfléchir aux raisons pour lesquelles cette stratégie fonctionne.

4. We begin with the set of integers $\{1, 2, \ldots, n\}$. We proceed by replacing any two integers $a \leq b$ in the set with $b - a$, and then perform the same operation on this new set. Note that the new set may have the same integer repeated, but it will have one less element. Keep on doing this until there is just one integer left. Show how this integer will be odd or even depending on the value of $n \pmod 4$.

Solution: Let S_j be the jth set of integers, and suppose that they have sum s_j. If we get S_{j+1} by replacing $a \leq b$ with $b-a$ then $s_{j+1} = s_j - a - b + (b-a) = s_j - 2a \equiv s_j \pmod 2$. Therefore the last element is $\equiv 1 + 2 + \ldots + n \pmod 2$ and this depends on $n \pmod 4$ since the sum of any four consecutive integers is even.

5. Given 11 red chips, 30 white chips and 19 blue chips, we can replace any two chips of two different colours, by two chips of the third colour. (For example, we may replace a white chip and a blue chip by two red chips.) Can we ever have the same number of chips of two different colours? converges

Solution: In our example we replace (r, w, b) by $(r - 1, w + 2, b - 1)$. Therefore $b - w \bmod 3$ and $r - b \bmod 3$ are invariants, and are always $\equiv 1 \pmod 3$, and so r, b and w are always distinct mod 3, so no two can be equal.

6. We play the game of *number solitaire*: Start with a finite set S of distinct integers, with smallest element 0 and largest element n. If $m, m + 1 \in S$ but $m + 2 \notin S$ then we can remove m and $m + 1$ from S and replace them by $m + 2$. Show that we can keep on doing this until we obtain a set in which all the integers differ by at least 2, and the largest element is either n or $n + 1$.

Solution: Let $\Sigma(S) := \sum_{m \in S} F_m$ where F_m is the mth Fibonacci number. When we replace $m, m + 1$ by $m + 2$, we do not change the value of $N(S)$. Suppose the sequence of sets is $S_1 = S, S_2, \ldots, S_k$ and let N_k be the largest element of S_k. By construction we have $n = N_1 \leq N_2 \leq \ldots \leq N_k$. We also have

$$F_{N_k} \leq \Sigma(S_k) = \Sigma(S) = \sum_{m \in S} F_m \leq \sum_{m \leq n} F_m = F_{n+2} - 1,$$

and so $n \leq N_k \leq n+1$. The values n and $n+1$ can be achieved, for example if $S = \{n\}$ and if $S = \{n-1, n\}$, respectively.

If $r, r+1, \ldots, r+\ell \in S$ but $r+\ell+1 \notin S$ then we can proceed by replacing $r+\ell-1, r+\ell$ by $r+\ell+1$, and then $r+\ell-3, r+\ell-2$ by $r+\ell-1$, etc. So eventually there will be no two elements that differ by 1 in our set.