Théorie de Galois. Mat 3661

Devoir 1. Date limite: le 23 janvier 2019

Problèmes à remettre :

1. Prouvez que les polynômes suivants sont irréductibles sur $\mathbb{Z}[x]$:
   (a) $x^6 + 50x^5 - 25x^3 + 10x - 40$
   (b) $x^3 + 5x^2 + 6x + 1$

2. Montrez que le polynôme $(x-1)(x-2)\cdots(x-n) - 1$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$ pour tout $n \geq 1$. (Piste : Supposez qu'il est réductible et considérez les valeurs des facteurs aux points $x = 1, 2 \ldots, n$.)

3. Montrez que $x^5 - ax - 1 \in \mathbb{Z}[x]$ est irréductible si $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0, 2, -1$.

4. Décomposez $x^8 - 1$ en facteurs irréductibles sur 1) $\mathbb{Q}$, 2) $\mathbb{F}_2$ et 3) $\mathbb{F}_3$.

5. Prouvez que $p(x) = x^3 + 5x + 5$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[x]$. Soit α une racine de $p(x)$. Trouvez les inverses de $(\alpha + 1)$ et $(\alpha^2 + 1)$ dans $\mathbb{Q}(\alpha) \cong \mathbb{Q}[x]/(p(x))$.

Problèmes sugérés (à ne pas remettre) du Dummit et Foote :

- anneaux (au besoin) : 7.1.6, 7.2.1, 7.3.1, 7.3.4, 7.3.10, 7.5.4, 8.2.5, 8.2.8
- anneaux de polynômes (au besoin) : 9.1.2, 9.1.4, 9.1.13, 9.2.8, 9.3.3
- critères d'irréducibilité : 9.4.4, 9.4.6, 9.4.9, 9.4.11, 9.4.12, 9.4.16