Département de mathématiques et de statistique
Université de Montréal

Algèbre 1. Mat 2600. Examen intra 2

Le 29 novembre 2012. 13h30-15h20

Professeure: Matilde N. Lalín

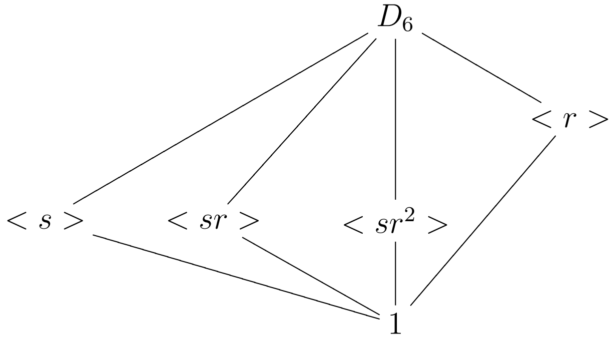
NOM:

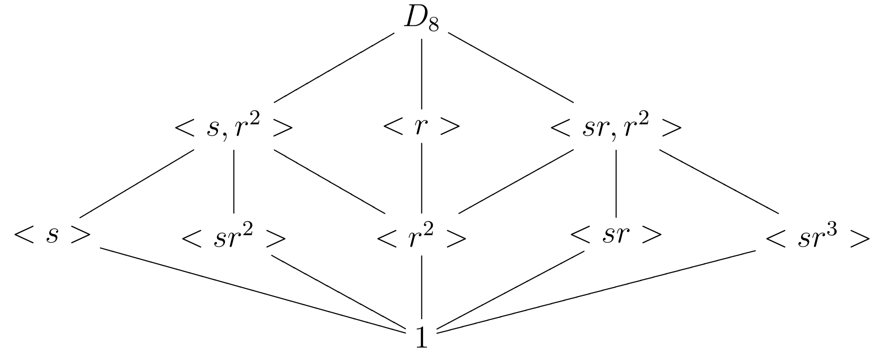
CPER:

1. Aucune documentation permise.
2. Les téléphones cellulaires doivent être éteints. Ni les portables ni les calculatrices ne sont permis.
3. Ne pas oublier d'écrire vos nom et CPER sur cette feuille.
4. Lire attentivement les questions avant de commencer à travailler.
5. **Justifier tous vos raisonnements.**
6. Continuer sur le verso de la feuille si vous avez besoin de plus d'espace.
7. Répondre à toutes les questions.
8. Le total des points de cet examen vaut 10.

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	1	2	2	2	3	10
Score:						

Treillis des sous-groupes





1. (1 point) Donner un exemple d'un groupe G qui a des sous-groupes d'ordre 1,2,3,4,5 mais qui n'a pas de sous-groupes d'ordre 7 ni 8.

Solution: Par le théorème de Lagrange, si $K \leq G$, on a que $|K|||G|$. Alors, on cherche $|G|$ multiple du ppcm$[1, 2, 3, 4, 5] = 60$.

Considérer le groupe cyclique de 60 éléments $C_{60} = \langle x \rangle$. Il a des sous-groupes d'ordre 1,2,3,4,5, donnés par $\langle 1 \rangle, \langle x^{30} \rangle, \langle x^{20} \rangle, \langle x^{15} \rangle, \langle x^{12} \rangle$, mais il n'a pas de sous-groupes d'ordre 7 ni 8 parce que $7, 8 \not| 60$.

Autre possibilité: Considérer le groupe dihédral D_{60}. Il a les sousgroupes $\{1\}, \langle r^{15} \rangle, \langle r^{10} \rangle, \langle r^{6} \rangle$ (sous-groupes du groupe cyclique $\langle r \rangle$) d'ordre 1,2,3,5 et $\langle s, r^{15} \rangle$ d'ordre 4, mais il n'a pas de sous-groupes d'ordre 7 ni 8 parce que $7, 8 \not| 60$.

2. (2 points) Soit $\varphi : \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ une application donnée par

$$\varphi(\bar{a}, b) = \overline{2a + b}.$$

Montrer que φ est bien définie et que c'est un épimorphisme de groupes

Solution: Supposons que $(\bar{a_1}, b) = (\bar{a_2}, b)$. Cela est équivalent à $a_1 \equiv a_2 \pmod{18}$ et à $18|(a_1 - a_2)$. Dans ce cas, $6|(a_1 - a_2)$ ce qui donne $a_1 \equiv a_2 \pmod{6}$ et $2a_1 + b \equiv 2a_2 + b \pmod{6}$. Par conséquent, $\overline{2a_1 + b} = \overline{2a_2 + b}$ et $\varphi(\bar{a_1}, b) = \varphi(\bar{a_2}, b)$, alors l'application est bien définie.

$\varphi((\bar{a_1}, b_1)+(\bar{a_2}, b_2)) = \varphi(\overline{a_1 + a_2}, b_1+b_2) = \overline{2(a_1 + a_2) + b_1 + b_2} = \overline{2a_1 + b_1}+\overline{2a_2 + b_2} = \varphi(\bar{a_1}, b_1) + \varphi(\bar{a_2}, b_2)$. Alors, φ est un homomorphisme de groupes.

Finalement, φ est un epimorphisme, car $\bar{b} = \varphi(0, b)$.

3. (2 points) Soit G un groupe et soit $N \trianglelefteq G$ avec $[G : N] = n$. Montrer que $g^n \in N$ pour tout $g \in G$.

Solution: Comme $N \trianglelefteq G$, on a que G/N est un groupe. Considérer le translaté $gN \in G/N$. Comme $|G/N| = n$, $|gN||n$, ce qui donne $(gN)^n = N$. Par conséquent, $g^n N = N$, ce qui est équivalent à dire que $g^n \in N$.

4. Pour chaque enoncé, dire s'il est vrai ou faux. S'il est vrai, le prouver. S'il est faux, donner un contre-exemple et le justifier.

   (a) (1 point) Soit H, K, G groupes tel que $H \leq K$ et $K \leq G$. Alors $H \leq G$.

   (b) (1 point) Soit H, K, G groupes tel que $H \trianglelefteq K$ et $K \trianglelefteq G$. Alors $H \trianglelefteq G$.

Solution:

(a) VRAI. Comme $H \subset K$ et que $K \subset G$, on a que $H \subset G$. L'opération est toujours la même, et le critère pour montrer que $H \leq K$ est le même que ce pour montrer que $H \leq G$. Plus précisement, $H \neq \emptyset$, car $H \leq K$, et pour $h_1, h_2 \in H$, on a que $h_1 h_2^{-1} \in H$, car $H \leq K$. Maintenant, on peut dire $H \neq \emptyset$, et pour $h_1, h_2 \in H$, on a que $h_1 h_2^{-1} \in H$, avec l'opértion de G, cela donne $H \leq G$.

(b) FAUX. Prendre $G = D_8$, $K = \langle s, r^2 \rangle$, $H = \langle s \rangle$. Alors $|K| = 4$ et $H = 2$, ce qui donne $[G : K] = [K : H] = 2$. Puisque un sous-groupe d'indice 2 est toujours normal, on a $K \trianglelefteq G$ et $H \trianglelefteq K$.

Mais $H \ntrianglelefteq G$ parce que $rsr^{-1} = sr^2 \notin H$.

5. Soit $n \geq 3$ entier.

   (a) (1 point) Soit n **impair**. Combien y-a-t-il de sous-groupes d'ordre 2 de D_{2n}? Donner une liste et indiquer (sans preuve) lesquels de ces sous-groupes sont normaux.

   (b) (1 point) Soit n **impair**. Soit $\varphi : D_{2n} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ un homomorphisme de groupes. Prouver que φ n'est pas un epimorphisme. *Piste:* Penser à Kerφ et utiliser (a).

   (c) (1 point) Répondre à la question (a) avec n **pair**.

Solution:

(a) Les sous-groupes d'ordre 2 de D_{2n} sont ceux qui sont engendrés par des éléments d'ordre 2, c'est-à-dire: $\langle sr^k \rangle$ avec $k = 0, 1, \ldots, n-1$ (il y a n sous-groupes d'ordre 2). Ces groupes ne sont pas normaux parce que $s(sr^k)s = sr^{-k}$ que sont éléments différents si n impair.

(b) Supposer que φ est un epimorphisme. Par le premier théorème d'isomorphisme, $D_{2n}/\mathrm{Ker}(\varphi) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Cela veut dire que $[D_{2n} : \mathrm{Ker}(\varphi)] = n$ et par le théorème de Lagrange, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sous-groupe normal d'ordre 2. Par la partie a), il n'y a pas de sous-groupe normal d'ordre 2, et on obtient une contradiction.

Autre forme: $\varphi(sr^i) + \varphi(sr^i) = \varphi((sr^i)^2) = \varphi(1) = \bar{0}$. Comme n impair et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'a pas d'élements d'ordre 2, on trouve que $\varphi(sr^i) = \bar{0}$. Il y a donc au moins $n+1$ éléments dans $\mathrm{Ker}(\varphi)$ (1 et sr^i avec $i = 0, 1, \ldots, n-1$). Maintenant $\varphi(r) = \varphi(s) + \varphi(sr) = \bar{0}$, alors, $\varphi(r^i) = \bar{0}$ et on a l'homomorphisme trivial, qui n'est pas d'epimorphisme, donc, contradiction.

(c) Dans ce cas, il y a $n+1$ sous-groupes, les mêmes que il y a pour le cas n impair, et $\langle r^{n/2} \rangle$. Le sous-groupe $\langle r^{n/2} \rangle$ est normal (parce que $r^i r^{n/2} r^{-i} = r^{n/2}$ et $sr^i r^{n/2} sr^i = r^{n/2}$) et les autres ne le sont pas.