Département de mathématiques et de statistique
Université de Montréal
Mathématiques discrètes. Mat 1500. Examen intra 1
Le 21 février 2013. 13h30-15h20
Professeure: Matilde N. Lalín

1. Aucun document ni calculatrice ni autres instruments ne sont autorisés.
2. Les téléphones cellulaires doivent être éteints.
3. Lire attentivement les questions avant de commencer à travailler.
4. Répondre à toutes les questions en **justifiant** vos réponses.
5. Répondre à toutes les questions dans les cahiers d'examen.
6. Éviter de déchirer les cahiers d'examen.

1. (3 points) Reécrire en langage logique la proposition suivante sans utiliser le symbole $\neg$.

$$\neg(\exists x \in \mathbb{R}((x > 1) \vee (x^2 > 5))).$$

Est-ce que la proposition est vraie ou fausse? Si elle est vraie, le démontrer. Si elle est fausse, donner un contre-exemple.

Solution: On a

$$\begin{aligned}
\neg(\exists x \in \mathbb{R}((x > 1) \vee (x^2 > 3))) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\neg((x > 1) \vee (x^2 > 5)) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}(\neg(x > 1) \wedge \neg(x^2 > 5)) \text{ (lois de De Morgan)} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}((x \leq 1) \wedge (x^2 \leq 5))
\end{aligned}$$

La proposition est fausse. Un contre-exemple est donné par $x = 2$ qui satisfait que $x^2 \leq 5$ mais ne satisfait pas que $x \leq 1$.

2. (4 points) Démontrer que $\neg(p \leftrightarrow q)$ et $\neg p \leftrightarrow q$ sont logiquement équivalentes. (Spécifiez si vous vous servez des lois de De Morgan ou de la distributivité.)

Solution:

$$\begin{aligned}
\neg(p \leftrightarrow q) &\Leftrightarrow \neg((p \to q) \wedge (q \to p)) \\
&\Leftrightarrow \neg(p \to q) \vee \neg(q \to p) \text{ (lois de De Morgan)} \\
&\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p) \\
&\Leftrightarrow (\neg(\neg p) \wedge \neg q) \vee (\neg(\neg q) \wedge \neg p) \text{ (lois de De Morgan)} \\
&\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \text{ (double négation)} \\
&\Leftrightarrow (p \vee (q \wedge \neg p)) \wedge (\neg q \vee (q \wedge \neg p)) \text{ (distributivité)} \\
&\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \text{ (distributivité)} \\
&\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge V \wedge V \wedge (\neg q \vee \neg p) \\
&\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \to q) \wedge (q \to \neg p) \\
&\Leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow q)
\end{aligned}$$

Solution: Avec un tableau de vérité:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\neg(p \leftrightarrow q)$	$\neg p$	$\neg p \leftrightarrow q$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	F

Comme la quatrième et la sixième colonnes sont égales, on conclue que les propositions sont logiquement équivalentes.

3. (5 points)

   (a) Prouver que si n est un entier positif, alors n est pair si et seulement si n^2 est pair.

   (b) Prouver que si n est un entier positif, alors n est pair si et seulement si n^2+1 est impair.

Solution: (a) Pour prouver $p \leftrightarrow q$, on va prouver $p \to q$ et $\neg p \to \neg q$.

$$\begin{aligned}(n \text{ pair}) &\Leftrightarrow \exists k(n = 2k)\\ &\Leftrightarrow \exists k(n^2 = 4k^2 = 2(2k^2))\\ &\Rightarrow (n^2 \text{ pair})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(n \text{ impair}) &\Leftrightarrow \exists k(n = 2k+1)\\ &\Leftrightarrow \exists k(n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1)\\ &\Rightarrow (n^2 + 1 \text{ impair})\end{aligned}$$

Donc, on a, par (a),

$$(n \text{ pair}) \Leftrightarrow (n^2 \text{ pair}) \Leftrightarrow (n^2 + 1 \text{ impair})$$

(b) On peut re-écrire une preuve analogue à la preuve de la partie (a).

Sinon, notons que

$$\begin{aligned}n^2 \text{ pair} &\Leftrightarrow \exists k(n^2 = 2k)\\ &\Leftrightarrow \exists k(n^2 + 1 = 2k + 1)\\ &\Leftrightarrow n^2 + 1\end{aligned}$$

4. (4 points) Soit A et B deux ensembles. Démontrer que

$$(A \cap B) \cup \overline{(A \cup \overline{B})} = B.$$

Solution:

$$\begin{array}{rcl}
(A \cap B) \cup \overline{(A \cup \overline{B})} & = & (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{\overline{B}}) \text{ (lois de De Morgan)} \\
& = & (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \\
& = & (A \cup \overline{A}) \cap B \text{ (distributivité)} \\
& = & U \cap B \\
& = & B
\end{array}$$

Solution:

$$\begin{array}{rcl}
(A \cap B) \cup \overline{(A \cup \overline{B})} & = & \{x \,|\, x \in A \cap B \vee x \in \overline{(A \cup \overline{B})}\} \\
& = & \{x \,|\, x \in A \cap B \vee x \in \overline{A} \cap \overline{\overline{B}}\} \text{ (lois de De Morgan)} \\
& = & \{x \,|\, x \in A \cap B \vee x \in \overline{A} \cap B\} \\
& = & \{x \,|\, (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in \overline{A} \wedge x \in B)\} \\
& = & \{x \,|\, (x \in A \vee x \in \overline{A}) \wedge x \in B\} \text{ (distributivité)} \\
& = & \{x \,|\, x \in B\} \\
& = & B
\end{array}$$

Solution:

$$\begin{array}{rcl}
x \in (A \cap B) \cup \overline{(A \cup \overline{B})} & \Leftrightarrow & x \in A \cap B \vee x \in \overline{(A \cup \overline{B})} \\
& \Leftrightarrow & x \in A \cap B \vee x \in \overline{A} \cap \overline{\overline{B}} \text{ (lois de De Morgan)} \\
& \Leftrightarrow & x \in A \cap B \vee x \in \overline{A} \cap B \\
& \Leftrightarrow & (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in \overline{A} \wedge x \in B) \\
& \Leftrightarrow & x \in A \vee x \in \overline{A}) \wedge x \in B \text{ (distributivité)} \\
& \Leftrightarrow & x \in B
\end{array}$$

Solution: Avec un tableau d'appartenance

A	B	$A \cap B$	$\overline{B}$	$A \cup \overline{B}$	$\overline{(A \cup \overline{B})}$	$(A \cap B) \cup \overline{(A \cup \overline{B})}$
1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	0	0

Comme la deuxième et la septième colonnes sont égales, on conclue que les ensembles sont égaux.

5. (4 points) Soit, pour chaque entier $n \geq 1$,

$$A_n = \{0, 1, 2 \ldots, n\}.$$

Trouver (il ne faut pas le prouver):

(a) $A_{100} - A_{97}$

(b) $P(A_{100} - A_{97})$

(c) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{100} A_n$

(d) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{100} A_n$

Solution: (a)

$$A_{100} - A_{97} = \{98, 99, 100\}$$

(b)

$$P(A_{100} - A_{97}) = \{\emptyset, \{98\}, \{99\}, \{100\}, \{98, 99\}, \{98, 100\}, \{99, 100\}, \{98, 99, 100\}\}$$

(c)

$$\bigcup_{n=1}^{100} A_n = \{0, 1, \ldots, 100\} = A_{100}$$

(d)

$$\bigcap_{n=1}^{100} A_n = \{0, 1\} = A_1$$

6. (3 points) Soit $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ la fonction donnée par $f(x) = 3x^2 + 2$.
   (a) Décider si f est injective ou non et le justifier.
   (b) Donner la portée de f (sans preuve).

Solution: (a) f est injective.

Preuve 1: Supposons que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors,

$$\begin{aligned} 3x_1^2 + 2 &= 3x_2^2 + 2 \\ \Rightarrow 3x_1^2 &= 3x_2^2 \\ \Rightarrow x_1^2 &= x_2^2 \\ \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 &= 0 \\ \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) &= 0 \end{aligned}$$

Comme $x_1, x_2 \geq 0$, on a que, soit $x_1 = x_2 = 0$, soit $x_1 + x_2 \neq 0$. Dans tous cas, $x_1 - x_2 = 0$ et $x_1 = x_2$. Donc la fonction est injective.

Preuve 2: Soient $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. On peut supposer que $x_1 > x_2 \geq 0$. Alors, $x_1 = x_2 + a$ avec $a > 0$. On a

$$f(x_1) = f(x_2 + a) = 3(x_2 + a)^2 + 2 = f(x_2) + 6x_2 a + a^2 > f(x_2)$$

Par conséquent la fonction est strictement croissante et injective.

(b) La portée est donnée par

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 2\} = \mathbb{R}_{\geq 2} = [2, \infty).$$

7. (2 points) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ donnée par $g(x) = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$. Quelle est $g^{-1}(\{-1, 1\})$?

Solution:

$$\begin{aligned} g^{-1}(\{-1\}) = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = -1 \right\} &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -1 \leq x + \frac{1}{2} < 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{3}{2} \leq x < -\frac{1}{2} \right\} = \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{-1}(\{1\}) = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 1 \right\} &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 1 \leq x + \frac{1}{2} < 2 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2} \right\} = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

Alors,

$$g^{-1}(\{-1,1\}) = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\frac{3}{2} \leq x < -\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} \leq x < -\frac{3}{2}\right\} = \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$