TP2

26, 35

#26.

Preuve. Selon la définition $A \bigoplus B = \{x | (x \in A \cup B) \wedge (x \notin A \cap B)\}$ et donc par la définition de la différence de deux ensembles on obtient que $A \bigoplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$. Alors, il faut montrer que $A \bigoplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$. En effet,

$$A \bigoplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) =$$

$$= (A \cap (\overline{A} \cup \overline{B})) \cup (B \cap (\overline{A} \cup \overline{B})) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B})) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B})) =$$

$$= (\varnothing \cup (A \cap \overline{B})) \cup (B \cap \overline{A}) \cup \varnothing) = (A \cap \overline{B})) \cup (B \cap \overline{A}) = (A - B) \cup (B - A),$$

où nous avons utilisé en ordre la loi de Morgan, la distributivité par rapport á $\cup$, puis la distributivité par rapport á $\cap$, le fait que $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et, finallement, le fait que $A \cap \overline{B} = A - B$. $\square$

#35.

a) Montrons que $\cup_{i=1}^{n} A_i = A_n$. En effet, par la définition $x \in \cup_{i=1}^{n} A_i$ si et seulement si $(x \in A_1) \vee (x \in A_2) \vee \cdots \vee (x \in A_n)$. Soit $x \in A_k$ pour certain $1 \leqslant k \leqslant n$. Alors $x \in A_n$ car $\forall k \ 1 \leqslant k \leqslant n \ A_k \subseteq A_n$. Nous avons montré que si $x \in \cup_{i=1}^{n} A_i$, alors $x \in A_n$. Autrement dit, $\forall x \ (x \in \cup_{i=1}^{n} A_i) \rightarrow (x \in A_n)$. Donc $\cup_{i=1}^{n} A_i \subseteq A_n$. D'autre part, $\forall x \ (x \in A_n) \rightarrow (x \in A_1) \vee \cdots (x \in A_n) \leftrightarrow (x \in \cup_{i=1}^{n} A_i)$ et donc $A_n \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_i$. Nous avons $\cup_{i=1}^{n} A_i \subseteq A_n$ et $A_n \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_i$, donc $\cup_{i=1}^{n} A_i = A_n$.

b) Montrons que $\cap_{i=1}^{n} A_i = A_1$. En effet,

$$\forall x \ (x \in \cap_{i=1}^{n} A_i) \leftrightarrow ((x \in A_1) \wedge (x \in A_2) \wedge \cdots \wedge (x \in A_n)) \leftrightarrow (x = 1) \leftrightarrow (x \in A_1).$$