TP2

9, 10, 14, 22

#9.

Preuve. Soient x et y deux nombres impairs. Alors selon la définition on a que $\exists k \in \mathbb{Z}\ x = 2k+1$ et $\exists l \in \mathbb{Z}\ y = 2l+1$. Donc

$$x + y = 2k + 1 + 2l + 1 = 2(k + l + 1).$$

On sait que la somme de deux nombres entiers est un nombres entier, donc le nombre $k + l \in \mathbb{Z}$. De même, le nombre $r = k + l + 1 \in \mathbb{Z}$, comme la somme de deux nombres entiers. Cela implique que $\exists r \in \mathbb{Z}\ x + y = 2r$ et donc le nombre $x + y$ est pair selon la définition. Puisqu'on a choisis n'importe quels deux nombres impairs x et y, on conclut que $\forall x\ \forall y\ x + y$ est pair. $\square$

#10.

Preuve. Soient x et y deux nombres rationnels. Alors selon la définition on a que $(\exists m \in \mathbb{Z}) \wedge (\exists n \in \mathbb{Z}) \wedge (n \neq 0)\ x = \frac{m}{n}$ et $(\exists p \in \mathbb{Z}) \wedge (\exists q \in \mathbb{Z}) \wedge (q \neq 0)\ y = \frac{p}{q}$. Donc

$$x + y = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + pn}{nq}.$$

On sait que le produit de deux nombres entiers est un nombre entier, donc nous avons que $mq \in \mathbb{Z}, pn \in \mathbb{Z}$ et $nq \in \mathbb{Z}$. De plus, le nombre $nq \neq 0$ car $(n \neq 0) \wedge (q \neq 0)$. On sait que la somme de deux nombres entiers est entiere, donc le nombre $mq + pn$ est entier. Définissons $s = mq + pn$ et $t = nq$. Alors $s \in \mathbb{Z}$ et $(t \in \mathbb{Z}) \wedge (t \neq 0)$. Nous avons démontré que $(\exists s \in \mathbb{Z}) \wedge (\exists t \in \mathbb{Z}) \wedge (t \neq 0)\ x + y = \frac{s}{t}$ quels que soient deux nombres rationnels x et y. Selon la définition on a que $x + y$ est rationnel (on écrit $x + y \in \mathbb{Q}$). Donc $\forall x \in \mathbb{Q}\ \forall y \in \mathbb{Q}\ x + y \in \mathbb{Q}$. $\square$

#14.

Preuve. Démontrons que le produit d'un nombre rationnel non nul et d'un nombre irrationnel est irrationnel en utilisant *la démonstration par l'absurde.*

Soit $x \in \mathbb{Q}, x \neq 0$. Alors selon la définition on a que $(\exists m \in \mathbb{Z}) \wedge (m \neq 0) \wedge (\exists n \in \mathbb{Z}) \wedge (n \neq 0)\ x = \frac{m}{n}$. Soit y est un nombre irrationnel. Alors selon la définition on a que $\neg((\exists p \in \mathbb{Z}) \wedge (\exists q \in \mathbb{Z}) \wedge (q \neq 0)\ y = \frac{p}{q})$. Supposons que le nombre $xy \in \mathbb{Q}$, alors $(\exists s \in \mathbb{Z}) \wedge (\exists t \in \mathbb{Z}) \wedge (t \neq 0)\ xy = \frac{s}{t}$. Donc

$$\frac{s}{t} = xy = \frac{m}{n}y,$$

car $x = \frac{m}{n}$. Puisque le nombre $x = \frac{m}{n} \neq 0$ on peut diviser les deux termes de l'équation
$$\frac{m}{n} y = \frac{s}{t}$$
par $\frac{m}{n}$. Cela implique que
$$y = \frac{s}{t}\frac{n}{m} = \frac{sn}{tm}.$$
Les nombres $a = sn$ et $b = tm$ sont entiers comme les produits de deux nombres entiers. De plus, le nombre $b \neq 0$ car $t \neq 0$ et $m \neq 0$. Nous avons démontré que si le nombre $xy \in \mathbb{Q}$, alors $(\exists a \in \mathbb{Z}) \wedge (\exists b \in \mathbb{Z}) \wedge (b \neq 0)$ $y = \frac{a}{b}$, donc le nombre $y \in \mathbb{Q}$. Nous somme arrivé à une contradiction car nous avons eu que y est irrationnel. Donc le nombre $(\forall x \in \mathbb{Q}) \wedge (x \neq 0) \wedge (\forall y$ irrationnel$)$ xy est irrationnel. $\square$

#22.

Preuve. On veut démontrer que (n est pair) $\longleftrightarrow$ ($7n+4$ est pair). Cette proposition est logiquement équivalente à ((n est pair) $\longrightarrow$ ($7n+4$ est pair))$\wedge$((n est pair) $\longleftarrow$ ($7n+4$ est pair)). Donc pour démontrer (n est pair) $\longleftrightarrow$ ($7n+4$ est pair) on doit démontrer (n est pair) $\longrightarrow$ ($7n+4$ est pair) et (n est pair) $\longleftarrow$ ($7n+4$ est pair).

Démonstration de (n est pair) $\longrightarrow$ ($7n+4$ est pair). Si n est pair, alors selon la définition $\exists m \in \mathbb{Z}$ $n = 2m$. Alors $7n + 4 = 7 \cdot 2m + 4 = 2(7m + 2)$. Démontrons que le nombre $k = 7m + 2$ est entier. En effet, le nombre $7m$ l'est comme le produit de deux nombres entiers et le nombre $7m + 2$ est entier comme la somme de deux nombres entiers. Donc on a montré que $\exists k \in \mathbb{Z}$ $7n+4 = 2k$. Alors selon la définition le nombre $7n + 4$ est pair.

Démonstration de (n est pair) $\longleftarrow$ ($7n+4$ est pair). Pour cela utilisons *la preuve indirecte*, i.e. démontrons que ($7n + 4$ est impair) $\longrightarrow$ (n est impair). Si $7n + 4$ est impair, alors $\exists l \in \mathbb{Z}$ $7n + 4 = 2l + 1$. Alors $7n = 2l + 1 - 4 = 2(l - 2) + 1$. Le nombre $r = l - 2$ est entier comme la différence de deux nombres entiers. Alors $\exists r \in \mathbb{Z}$ $7n = 2r + 1$ et donc le nombre $7n$ est impair selon la définition. Pour démontrer que le nombre n est impair utilisons la démonstration par l'absurde, i.e. supposons que le nombre n est pair. Alors $\exists t \in \mathbb{Z}$ $n = 2t$. Cela implique que $7n = 7 \cdot (2t) = 2(7t)$. Le nombre $s = 7t$ est entier comme le produit de deux entiers. Alors on a montré que $\exists s \in \mathbb{Z}$ $7n = 2s$ et donc le nombre $7n$ est pair selon la définition. C'est une contradiction car on a déjà montré que $7n$ est impair. Donc le nombre n est impair. $\square$