Mathématiques Discrètes

M Lalín

5.1 Relations de récurrence

Déf Une **relation de récurrence** pour la suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une formule qui exprime a_n en fonction d'un ou de plusieurs termes qui le précèdent dans la suite, soit $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, pour tout entier $n \geq n_0$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$.

Une suite est une **solution d'une relation de récurrence** si ses termes satisfont la relation de récurrence.

Ex Le nombre de bactéries d'une colonie double chaque heure. Si cette colonie comprend cinq bactéries à l'origine, combien y aura-t-il de bactéries après 4 heures?

Sol: Soit a_n = nombre de bactéries après n heures. On a

$a_0 = 5$, $a_n = 2a_{n-1}$ $n \geq 1$

On peut prouver par induction que $a_n = 5\cdot 2^n$.

Ex Soit $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ $n \geq 2$ une relation de récurrence.

① $a_n = 3n$ est solution, car

$2a_{n-1} - a_{n-2} = 6(n-1) - 3(n-2) = 6n-6-3n+6 = 3n = a_n$.

② $a_n = 5$ est solution, car

$2a_{n-1} - a_{n-2} = 2\cdot 5 - 5 = 5 = a_n$

③ $a_n = 2^n$ n'est pas solution car

$2a_{n-1} - a_{n-2} = 2\cdot 2^{n-1} - 2^{n-2} = 4\cdot 2^{n-2} - 2^{n-2} = 3\cdot 2^{n-2} \neq 2^n = a_n$

Déf: Les **conditions initiales** spécifient les éléments qui précèdent le premier élément à partir duquel la relation de récurrence s'applique.

Ex Si $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ $\forall n \geq 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 3$,

alors cela donne $a_n = 3n$ comme solution unique. (Il faut le prouver par induction).

Si on a $a_0 = 5$, $a_1 = 5$, alors cela donne $a_n = 5$, etc.

Ex Le calcul de l'intérêt composé. On suppose qu'une personne dépose $\$10.000$ dans une compte d'épargne et bénéficie d'un taux d'intérêt de 6% par an composé annuellement. Quel sera le montant accumulé dans ce compte après 30 ans?

Sol: Soit p_n = le montant accumulé (en dollars) après n ans. On a

$p_n = p_{n-1} + 0{,}06\, p_{n-1} = 1{,}06\, p_{n-1}$ $n \geq 1$

$p_0 = 10.000$

Par induction, on peut prouver que $p_n = (1,06)^n \cdot p_0 = (1,06)^n\, 10.000$

Après 30 ans, il y a $p_{30} = (1,06)^{30} \cdot 10.000 \simeq 57.434,91$ dollars!

Ex Lapins et nombres de Fibonacci. Un jeune couple de lapins est laissé dans une île déserte. Un couple est incapable de se reproduire avant que les deux lapins aient deux mois. Après deux mois, un couple donne naissance à un autre couple de lapins, et ce tous les mois.

Trouver une relation de récurrence permettant de calculer le nombre de couples de lapins au bout de n mois, en supposant qu'aucun lapin ne meure.

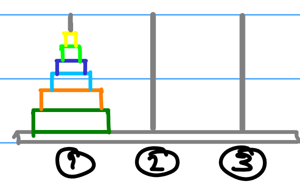
Sol Soit l_n = nombre de couples de lapins après n mois. On a

l_n = # couples des mois précédents + # nouveaux nés $= l_{n-1} + l_{n-2}$

$l_1 = l_2 = 1$

On a que $l_n = f_n$, la suite de Fibonacci

Ex La tour de Hanoi. On a trois bâtons sur lesquels sont enfilés des disques de différentes largeurs. Au début, tous les disques sont enfilés sur le premier bâton en ordre croissant. Le but est de replacer tous les disques en ordre croissant sur le troisième bâton en suivant des règles



① On ne peut déplacer plus d'un disque à la fois.

② On ne peut placer un disque que sur un autre disque plus grand que lui ou sur un emplacement vide.

Question: Trouvez h_n = nombre minimal de déplacements nécessaires pour n disques.

Sol: On a besoin de

① h_{n-1} mouvements pour transférer les premiers $n-1$ disques du premier bâton au deuxième,

② 1 mouvement pour transférer le n-ième disque du premier bâton au troisième

③ h_{n-1} mouvements pour transférer les premiers $n-1$ disques du deuxième bâton au troisième.

Alors $h_n = 2h_{n-1} + 1 \quad n \geq 2, \quad h_1 = 1$

On voit que $h_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, $h_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7, \ldots$ Prouvons par induction que $h_n = 2^n - 1$. On a que $P(1)$ V. Supposons que $P(n)$ V. Alors
$h_{n+1} = 2h_n + 1 = 2 \cdot (2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1 \Rightarrow P(n+1)$ V
Alors $h_n = 2^n - 1$ par induction.

Ex Trouvez une relation de récurrence et donnez les conditions initiales permettant de calculer le nombre de chaînes binaires de longueur n qui ne contient pas deux 1 consécutifs. Combien existe-t-il de chaînes de ce type dont la longueur est 5 ?

Sol: Soit $a_n = \#\{$chaînes binaires de longueur n sans deux 1 consécutifs$\}$
$a_n = \#\{$chaînes qui finissent par 0$\} + \#\{$chaînes qui finissent par 1$\}$
$= a_{n-1} + \#\{$chaînes qui finissent par 01$\} = a_{n-1} + a_{n-2}$ $n \geq 3$.
$a_1 = 2$, $a_2 = 3$
On trouve $a_3 = a_2 + a_1 = 5$, $a_4 = a_3 + a_2 = 8$, $a_5 = a_4 + a_3 = 13$
(Notons que $a_n = f_{n+2}$)

5.2 Solutions des relations de récurrence

Déf Une relation de récurrence linéaire homogène de degré k à coefficients constants (RRLHCC de degré k) est une relation de récurrence de la forme

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \quad \text{où } c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}, \ c_k \neq 0.$$

Par le principe de l'induction, une telle suite est déterminée de manière unique par cette relation et k conditions initiales

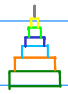
$$a_0 = d_0, a_1 = d_1, \ldots, a_{k-1} = d_{k-1}$$

Ex $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ RRLHCC de degré 2.
$a_n = a_{n-5}$ RRLHCC de degré 5.
$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}^2$ n'est pas linéaire
$h_n = 2h_{n-1} + 1$ n'est pas homogène
$b_n = n b_{n-1}$ n'est pas à coefficients constants.

Méthode pour résoudre

Si $a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k}$, alors, on cherche des solutions de la forme $a_n = r^n$. On a $r^n = c_1 r^{n-1} + \cdots + c_k r^{n-k} \Rightarrow \underbrace{r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_k = 0}_{\text{équation caractéristique}}$

Théo Soit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ avec $c_2 \neq 0$. Supposons que l'équation caractéristique



$r^2-c_1r-c_2=0$ a deux racines distinctes r_1 et r_2. Alors la suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de la relation de récurrence $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}$ ssi $a_n=\alpha_1r_1^n+\alpha_2r_2^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$, où α_1,α_2 sont des constantes.

Dém. Supposons que $a_n=\alpha_1r_1^n+\alpha_2r_2^n$. Comme $r_1^2-c_1r_1-c_2=0$, $r_2^2-c_1r_2-c_2=0$, on a

$c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}=c_1(\alpha_1r_1^n+\alpha_2r_2^n)+c_2(\alpha_1r_1^n+\alpha_2r_2^n)$

$=\alpha_1(c_1r_1^{n-1}+c_2r_1^{n-2})+\alpha_2(c_1r_2^{n-1}+c_2r_2^{n-2})=\alpha_1r_1^{n-1}(c_1r_1+c_2)+\alpha_2r_2^{n-1}(c_1r_2+c_2)$

$=\alpha_1r_1^n+\alpha_2r_2^n=a_n$

Maintenant supposons que $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}$ avec $a_0=d_0$ et $a_1=d_1$

On résoudre $\begin{cases} d_0=\alpha_1+\alpha_2 \\ d_1=\alpha_1r_1+\alpha_2r_2 \end{cases} \Longrightarrow \alpha_1=\dfrac{d_1-d_0r_2}{r_1-r_2}, \quad \alpha_2=\dfrac{d_0r_1-d_1}{r_1-r_2}$

L'unicité provient du principe de l'induction. #

Ex Quelle est la solution de $a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$, $a_0=1$, $a_1=8$?

Sol L'équation caractéristique est $r^2-r-2=0$, racines $r_1=2$, $r_2=-1$. Il faut résoudre $\begin{cases} 1=\alpha_1+\alpha_2 \\ 8=\alpha_1 2-\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1=3, \ \alpha_2=-2 \qquad a_n=3\cdot 2^n-2\cdot(-1)^n.$

Ex Formule pour la suite de Fibonacci

$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$, $f_0=0$, $f_1=1$

Sol En suivant la même méthode, on trouve $r^2-r-1=0$, $r_1=\frac{1+\sqrt5}{2}$, $r_2=\frac{1-\sqrt5}{2}$

$$\begin{cases} 0=\alpha_1+\alpha_2 \\ 1=\alpha_1\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)+\alpha_2\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=\alpha_1+\alpha_2 \\ 1=\frac{\sqrt5}{2}(\alpha_1-\alpha_2) \end{cases} \Rightarrow \alpha_1=\frac{1}{\sqrt5}, \ \alpha_2=-\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\Rightarrow f_n=\frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right)$$

Théo Soit $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ avec $c_2\neq0$. Supposons que l'équation caractéristique $r^2-c_1r-c_2=0$ a une racine double r_0. Alors la suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de la relation de récurrence $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}$ ssi $a_n=\alpha_1r_0^n+\alpha_2nr_0^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$, où α_1,α_2 sont des constantes.

Ex Quelle est la solution de $a_n=6a_{n-1}-9a_{n-2}$, $a_0=2$, $a_1=9$

Sol En suivant la méthode, $r^2-6r+9=0 \Rightarrow r_0=3$ racine double.

$$\begin{cases} 2=\alpha_1+\alpha_2\cdot0 \\ 9=\alpha_1 3+\alpha_2\cdot1\cdot3 \end{cases} \Longrightarrow \alpha_1=2, \ \alpha_2=1 \Rightarrow a_n=2\cdot3^n+n3^n=(n+2)3^n.$$

Les solutions d'une RRLHCC de degré k.

Théo: Soit $c_1,\dots,c_k\in\mathbb{R}$, $c_k\neq0$. Supposons que l'équation caractéristique $r^k-c_1r^{k-1}-c_2r^{k-2}-\dots-c_k=0$ a k racines distinctes deux à deux

$r_1, r_2, \ldots, r_k$. Alors la suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de la récurrence $a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k}$ ssi $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \dots + \alpha_k r_k^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont constantes

Obs La version la plus générale du théorème précédent inclut des multiplicités sur quelques racines

Ex: Quelle est la solution de $a_n = 7a_{n-1} - 14a_{n-2} + 8a_{n-3}$, $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, $a_2 = 15$?

Sol: On a $r^3 - 7r^2 + 14r - 8 = 0$. Alors, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 4$

$$\begin{cases} 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 5 = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 4 \\ 15 = \alpha_1 \cdot 1^2 + \alpha_2 \cdot 2^2 + \alpha_3 \cdot 4^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 3 = \alpha_2 + \alpha_3 3 \\ 13 = \alpha_2 3 + \alpha_3 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 3 = \alpha_2 + \alpha_3 3 \\ 4 = \alpha_3 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = \frac{1}{3} \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = \frac{2}{3} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{3} + 2^n + \frac{2}{3} 4^n$$

5.4 Le principe d'inclusion-exclusion

Théo: Soit A et B deux ensembles finis. Alors

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Ex Une classe de mathématiques discrètes comprend 200 étudiants en mathématiques, 150 étudiants en informatique et 110 étudiants à la fois en mathématiques et en informatique. Combien y a-t-il d'étudiants dans cette classe si tout étudiant est inscrit à au moins une discipline?

Sol Soit $M = \{$étudiants en mathématiques$\}$, $I = \{$étudiants en informatique$\}$

On a $|M| = 200$, $|I| = 150$, $|M \cap I| = 110$. Alors

$|\{\text{étudiants}\}| = |M \cup I| = |M| + |I| - |M \cap I| = 200 + 150 - 110 = 240$

Théo Soit A, B, C ensembles finis. Alors

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$

(Faire un diagramme de Venn)

Théo. Soit $A_1, \ldots, A_n$ ensembles finis. Alors

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|$$

Dém Soit a un élément de $A_1, \ldots, A_r$, mais pas de $A_{r+1}, \ldots, A_n$. a est dénombré

$C(r,1)$ fois par $\sum |A_i|$,

$C(r,2)$ fois par $\sum |A_i \cap A_j|$,

$C(r,3)$ fois par $\sum |A_i \cap A_j \cap A_k|$, ...

$C(r,m)$ fois par $\sum |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_m}|$ si $m \le r$ et 0 si $m > r$

Par conséquent, a est dénombré

$$c(r,1) - c(r,2) + c(r,3) - \dots + (-1)^{r+1} c(r,r) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} c(r,k) \text{ fois}$$

Comme $\sum_{k=0}^{r} (-1)^k c(r,k) = 0$, on conclut que a est dénombré exactement une fois #

Ex Combien existe-t-il de nombres entiers positifs qui n'excèdent pas 2000 et qui sont divisibles par 7, par 11, ou par 13?

Sol: Soit

$$A_7 = \{1 \le n \le 2000 \mid 7 \text{ divise } n\}$$
$$A_{11} = \{1 \le n \le 2000 \mid 11 \text{ divise } n\}$$
$$A_{13} = \{1 \le n \le 2000 \mid 13 \text{ divise } n\}$$

Observons que $A_b \cap A_c = \{1 \le n \le 2000 \mid b, c \text{ divise } n\}$
$= \{1 \le n \le 2000 \mid \text{ppcm}(b,c) \text{ divise } n\} = A_{\text{ppcm}(b,c)}$

On a $|A_7| = \left\lfloor \frac{2000}{7} \right\rfloor = 285$, $|A_{11}| = \left\lfloor \frac{2000}{11} \right\rfloor = 181$, $|A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{13} \right\rfloor = 153$

$|A_7 \cap A_{11}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 11} \right\rfloor = 25$, $|A_7 \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 13} \right\rfloor = 21$, $|A_{11} \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{11 \cdot 13} \right\rfloor = 13$

$|A_7 \cap A_{11} \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 11 \cdot 13} \right\rfloor = 1$

$$|A_7 \cup A_{11} \cup A_{13}| = |A_7| + |A_{11}| + |A_{13}| - |A_7 \cap A_{11}| - |A_7 \cap A_{13}| - |A_{11} \cap A_{13}| + |A_7 \cap A_{11} \cap A_{13}|$$
$$= 285 + 181 + 153 - 25 - 21 - 13 + 1 = 561 \text{ nombres.}$$

5.5 Applications du principe d'inclusion - exclusion

Soit U un ensemble fini, $P_1, \dots, P_n$ quelques propriétés et soit

$A_i = \{x \in U \mid x \text{ a la propriété } P_i\}$

On défini $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = N(P_{i_1} \dots P_{i_k})$

$$|U| = N$$

et $N(P_1' \dots P_n')$ le nombre d'éléments de U ne satisfaisant aucune des propriétés $P_1, \dots, P_n$, égal à $N - |A_1 \cup \dots \cup A_n|$

Par le principe de l'inclusion-exclusion,

$$N(P_1' \dots P_n') = N - \sum_{i=1}^{n} N(P_i) + \sum_{1 \le i < j \le n} N(P_i P_j) - \sum_{1 \le i < j < k \le n} N(P_i P_j P_k) \dots + (-1)^n N(P_1 \dots P_n)$$

Ex, Combien de solutions l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 = 13$$

Mathématiques Discrètes

M Lalín

admet-elle, où $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$, $x_1 \leq 5$, $x_2 \leq 4$ et $x_3 \leq 6$?

Sol $P_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 13,\ x_1 > 5\}$

$P_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 13,\ x_2 > 4\}$

$P_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 13,\ x_3 > 6\}$

$N = C(13+3-1, 13) = 105$, $N(P_1) = C(7+3-1, 7) = 36$, $N(P_2) = C(8+3-1, 8) = 45$

$N(P_3) = C(6+3-1, 6) = 28$, $N(P_1 P_2) = C(2+3-1, 2) = 6$, $N(P_1 P_3) = C(0+3-1, 0) = 1$

$N(P_2 P_3) = C(1+3-1, 1) = 3$, $N(P_1 P_2 P_3) = 0$

$N(P_1' P_2' P_3') = 105 - 36 - 125 - 28 + 6 + 1 + 3 - 0 = 6$

L'équation a 6 solutions avec les conditions demandées.

Ex La crible d'Ératosthène Trouver les nombres premiers ≤ 100

Sol Un nombre n est composé ssi il existe $p \leq \sqrt{n}$ premier tel que $p \mid n$

Alors, $n \in \mathbb{N}$, $1 < n \leq 100$ est premier ssi $n = 2, 3, 5, 7$ ou si $2, 3, 5, 7 \nmid n$

Soit $P_\ell = \{n \in \mathbb{N}, 1 < n \leq 100 \mid \ell \text{ divise } n\}$

Il faut trouver $N(P_2' P_3' P_5' P_7')$

$$
\begin{aligned}
N(P_2' P_3' P_5' P_7') &= 99 - N(P_2) - N(P_3) - N(P_5) - N(P_7) + N(P_2 P_3) + \cdots + N(P_5 P_7) \\
&\quad - N(P_2 P_3 P_5) - N(P_2 P_3 P_7) - N(P_2 P_5 P_7) - N(P_3 P_5 P_7) \\
&\quad + N(P_2 P_3 P_5 P_7) \\
&= 99 - \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 7} \right\rfloor \\
&\quad + \left\lfloor \frac{100}{3\cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3\cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5\cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 3\cdot 5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 3\cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 5\cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3\cdot 5\cdot 7} \right\rfloor \\
&\quad + \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7} \right\rfloor \\
&= 99 - 50 - 33 - 20 - 14 + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 - 3 - 2 - 1 - 0 + 0 = 21
\end{aligned}
$$

Il faut ajouter les quatre nombres premiers 2, 3, 5, 7. Il y a 25 nombres premiers ≤ 100.

On peut se servir de la crible d'Ératosthène pour trouver les nombres premiers ≤ 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Dénombrement des fonctions surjectives

Ex Soit $m, k \in \mathbb{Z}_{>0}$ avec $m \geq k$. Alors, il y a
$k^m - C(k,1)(k-1)^m + C(k,2)(k-2)^m \dots + (-1)^{k-1} C(k,k-1) 1^m$
fonctions surjectives d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à k éléments.

Sol Soit $P_i = \{f : \{a_1, \dots, a_m\} \longrightarrow \{b_1, \dots, b_k\} \mid b_i \notin \operatorname{Im}(f)\}$

On a donc que f est surjective ssi $f \in P_1' P_2' \dots P_k'$. On a que $N = k^m$
$N(P_i) = (k-1)^m$ et il y a $C(k,1)$ termes de ce type, $N(P_i P_j) = (k-2)^m$ et il y a $C(k,2)$ termes de ce type, ... $N(P_1 \dots \widehat{P_j} \dots P_k) = 1^m$ avec $C(k,k-1)$ termes et $N(P_1 \dots P_k) = 0$. On obtient la formule en appliquant inclusion-exclusion. #

Ex De combien de façons peut-on attribuer six tâches différentes à quatre employés différents si tous ces employés doivent recevoir au moins une tâche?

Sol Il faut compter $f : \{\text{tâches}\} \longrightarrow \{\text{employés}\}$ surjectives.
On a $4^6 - C(4,1)3^6 + C(4,2)2^6 - C(4,3)1^6 = 4096 - 2916 + 384 - 6 = 1558$

Dérangements

Ex Problème du vestiaire. Un nouvel employé d'un vestiaire place les manteaux de n clients d'un restaurant en oubliant de mettre un ticket sur les manteaux. Lorsque les clients viennent réclamer leur manteaux, l'employé du vestiaire remet aléatoirement à chacun un manteau à partir des manteaux restants. De combien de façons est-il possible qu'aucun des clients ne reçoive son propre manteau?

Déf Un **dérangement** est un permutation d'objets qui ne laisse aucun objet dans sa position initiale.

Théo Soit D_n le nombre de dérangements de n objets. On a
$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

Obs: La formule ci dessus est relié au
$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \simeq 0{,}368\dots$$

Dém: Soit $P_i = \{$permutations dont le i-ème objet reste à sa position originale.

On a donc $D_n = N(P_1' \dots P_n')$, $N = n!$, $N(P_i) = (n-1)!$ et il y a $C(n,1)$ termes de ce type, $N(P_i P_j) = (n-2)!$ et il y a $C(n,2)$ termes de ce type, ... $N(P_1 \dots P_n) = (n-n)! = 0!$ et il y a $C(n,n) = 1$ termes de ce type.

Par inclusion-exclusion,

$$D_n = n! - C(n,1)(n-1)! + C(n,2)(n-2)! - \dots + (-1)^n C(n,n)\,0!$$

$$= n! - \frac{n!}{1!\,\cancel{(n-1)!}}\cancel{(n-1)!} + \frac{n!}{2!\,\cancel{(n-2)!}}\cancel{(n-2)!} - \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!\,\cancel{0!}}\cancel{0!}$$

$$= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) \#$$

A.3 Fonctions génératrices

Déf: La **fonction génératrice** de la suite de nombres réels $a_0, a_1, \dots, a_k, \dots$ est la série infinie $G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

Ex: La série génératrice de la suite

① $1,1,1$ est $G(x) = 1+x+x^2 = \frac{x^3-1}{x-1}$ (La série est finie si la suite est finie)

② $1,1,1,\dots$ est $G(x) = 1+x+x^2+\dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

Ex Soit $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $a_k = C(m,k)$, $k=0,1,\dots m$. La fonction génératrice de $a_0,\dots,a_m$ est $G(x) = C(m,0)+C(m,1)x+\dots+C(m,m)x^m = (1+x)^m$ (Théo du binôme)

Dans le cours de calcul on étudie la **convergence** de la série $\sum_{k=0} a_kx^k$

Si la série converge pour $x \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, alors $G(x)$ donne une **fonction analytique** (toutes les dérivés existent sur $(-\varepsilon,\varepsilon)$)

La **formule de Taylor** donne $a_k = \frac{G^{(k)}(0)}{k!}$

Ex La fonction $G(x) = \frac{1}{1-x}$ est la fonction génératrice de $1,1,1,\dots$ pour $|x|<1$. On l'appelle la **série géométrique**.

Ex La fonction $G(x) = \frac{1}{1-\alpha x}$ est la fonction génératrice de $1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\dots$ pour $|\alpha x|<1$.

Théo: Soit $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k$, $H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_kx^k$. Dans un domaine où les deux séries convergent absolument, on a

$$G(x)+H(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)x^k \qquad G(x)H(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right)x^k$$

Ex Trouvez les coefficients de $G(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ si $|x|<1$

Sol Comme $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots$ si $|x|<1$, alors

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} 1\cdot 1\right)x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$$

Théo: Soit $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k$. Dans un domaine où la série converge absolument, on a $G'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k$.

Ex Trouvez les coefficients de $F(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ si $|x|<1$

Sol Soit $G(x) = \frac{1}{1-x}$, $|x|<1$.

$$F(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = G'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k.$$

Mathématiques Discrètes

M Lalín

Problèmes de dénombrement.

Problèmes de la forme $y_1+\dots+y_m=s$.

Ex Trouvez le nombre de solutions naturelles de

$$y_1+y_2+y_3=15,$$

si $2\le y_1\le 5$, $3\le y_2\le 6$ et $8\le y_3\le 9$.

Sol Il faut trouver le coefficient de x^{15} dans

$$(x^2+x^3+x^4+x^5)(x^3+x^4+x^5+x^6)(x^8+x^9)$$

$$= x^2(1+x+x^2+x^3)\,x^3(1+x+x^2+x^3)\,x^8(1+x)$$

$$= x^{13}(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3)(1+x)$$

$$= x^{13}\left(\text{termes de moins haute degré} + 5x^2 + \text{termes de plus haute degré}\right)$$

(On a fait $x^2\cdot 1\cdot 1 + x\cdot x\cdot 1 + x\cdot 1\cdot x + 1\cdot x^2\cdot 1 + 1\cdot x\cdot x$)

Il y a 5 solutions avec les conditions demandées.

Ex De combien de façons différentes peut-on distribuer 8 biscuits identiques à trois enfants de manière que chacun reçoive au moins deux biscuits mais pas plus que quatre?

Sol Il faut résoudre $y_1+y_2+y_3=8$, $2\le y_i\le 4$. On a $(x^2+x^3+x^4)^3$

Le coefficient de x^8 est

$$x^6(1+x+x^2)^3 = x^6\left(\text{termes de moins haute degré} + 6x^2 + \text{termes de plus haute degré}\right)$$

(On a calculé $3\cdot x^2\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot x\cdot x\cdot 1$)

Fonctions génératrices et récurrence

Ex Résoudre la récurrence suivante

$a_n = 3a_{n-1}$ $\forall n\ge 1$, $a_0=2$.

Sol Soit $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Alors $xG(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}x^k$

$$G(x)-3xG(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - 3\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}x^k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k-3a_{k-1})x^k = 2$$

Alors $G(x)(1-3x)=2 \Rightarrow G(x)=\dfrac{2}{1-3x} = 2\sum_{k=0}^{\infty}(3x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2\cdot 3^k x^k$

$\Rightarrow a_n = 2\cdot 3^n$

Ex Résoudre la récurrence suivante

$a_n = 8a_{n-1}+10^{n-1}$ $n\ge 1$, $a_0=1$

Sol Soit $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Alors $xG(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}x^k$

$$G(x)-8xG(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - 8\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}x^k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k-8a_{k-1})x^k$$

$$= 1+\sum_{k=1}^{\infty} 10^{k-1}x^k$$

61

Mathématiques Discrètes

M Larin

Alors $G(x)(1-8x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 10^{k-1}x^k = 1 + x\sum_{k=1}^{\infty} (10x)^{k-1} = 1 + x\sum_{k=0}^{\infty} (10x)^k = 1 + \frac{x}{1-10x}$

$= \frac{1-9x}{1-10x}$

$\Longrightarrow G(x) = \frac{1-9x}{(1-8x)(1-10x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-8x} + \frac{1}{1-10x}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(8x)^k + \sum_{k=0}^{\infty}(10x)^k\right)$

$\Longrightarrow a_n = \frac{8^n+10^n}{2}$