Mathématiques Discrètes

M Lalín

4.1 Dénombrement

Nous allons étudier les principes de comptage

Principe de la somme. Si on peut accomplir un tâche de m façons et une deuxième tâche de n façons et si on ne peut pas effectuer ces tâches simultanément, alors il y a $m+n$ façons d'exécuter l'une ou l'autre de ces tâches.

En d'autres mots, si A et B sont deux ensembles finis tels que $A \cap B = \emptyset$, alors $|A \cup B| = |A| + |B|$

Plus généralement, si $A_1, \dots, A_n$ sont des ensembles finis disjoints deux à deux, alors $|A_1 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + \dots + |A_n|$

Ex Il faut choisir un représentant du département de mathématiques qui peut être professeur ou étudiant. De combien de façons différentes peut-on sélectionner le représentant s'il y a 34 professeurs et 127 étudiants?

Sol On peut choisir le représentant de $34+127=161$ façons

Principe du produit On suppose qu'une procédure peut être divisée en deux tâches. S'il existe m façons de faire la première tâche et puis n façons d'accomplir la deuxième tâche lorsque la première est terminée, alors il y a $m \cdot n$ façons d'effectuer la procédure.

En d'autres mots, si A et B sont deux ensembles finis, alors

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Plus généralement, si $A_1, \dots, A_n$ sont des ensembles finis, alors

$$|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \times \dots \times |A_n|$$

Ex Il y a 31 micro-ordinateurs dans un centre de calcul. Chaque micro-ordinateur a 24 ports. Combien y a-t-il de ports différents dans le centre?

Sol Il y a $31 \cdot 24 = 744$

Ex Combien de plaques d'immatriculation différentes peut-on obtenir si chacune contient une série de trois chiffres suivie de trois lettres?

Sol: Il y a $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 17\,576\,000$ plaques.

Ex: Combien y a-t-il des fonctions d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à n éléments?

Sol: Chaque élément de l'ensemble de m éléments a n images possibles. Il

Mathématiques Discrètes

M Lalín

Y a $\underbrace{n\cdot n\cdots n}_{m} = n^m$ fonctions.

Ex: Combien y a-t-il des fonctions injectives d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à n éléments?

Sol: Le premier élément a n images possibles, le deuxième élément a $n-1$ images possibles, etc. Il y a $\underbrace{n(n-1)\cdots(n-m+1)}_{m}$ fonctions

(Il faut que $n \geq m$)

Théo Soit S un ensemble fini de cardinalité $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$|\mathcal{P}(S)| = 2^n$$

Dém: On fait une liste ordonnée des éléments de S: $(s_1, \dots, s_n)$

Pour chaque $U \subseteq S$, on associe une chaîne binaire de la forme suivante

$$\begin{cases} 0 \text{ à la place } i \text{ si } s_i \notin U \\ 1 \text{ à la place } i \text{ si } s_i \in U \end{cases}$$

Le nombre de chaînes binaires de longueur n est $\underbrace{2\cdot 2\cdots 2}_{n} = 2^n$ #

Ex Chaque utilisateur d'un système informatique a un mot de passe ayant de six à huit caractères où chaque caractère est une lettre majuscule ou une chiffre. Chaque mot de passe contient au moins un chiffre. Combien y a-t-il de possibilités de mots de passe?

Sol Il faut compter les mots de passe de chaque longueur possible. Pour longueur 6 il y a 36^6 mots sans restriction et 26^6 mots sans chiffres. Il y a donc $36^6 - 26^6$ mots de passe de longueur 6 avec au moins un chiffre.

Pour longueurs 7 et 8, on a $36^7 - 26^7$ et $36^8 - 26^8$.

Le total est $(36^6 - 26^6) + (36^7 - 26^7) + (36^8 - 26^8) = 2.684.483.063.360$.

Principe d'inclusion-exclusion Lorsqu'on peut accomplir deux tâches simultanément on ne peut utiliser le principe de la somme directement

Si on peut accomplir une tâche de m façons et une deuxième tâche de n façons, alors, le nombre de façons d'exécuter l'une ou l'autre de ces tâches est $m+n$ moins le nombre de façons d'effectuer ces tâches simultanément.

En d'autres mots, si A et B sont deux ensembles finis, alors

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Ex Combien de chaînes binaires de longueur 7 commencent par le bit 1 ou se terminent par les deux bits 00?

Sol (1) Le nombre de chaînes binaires $1xxxxxx$ qui commencent par 1 est

$2^6 = 64$

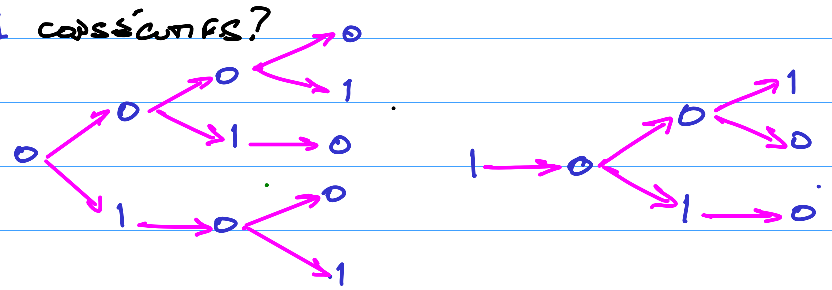
② Le nombre de chaînes binaires XXXXX00 qui se terminent par 00 est $2^5 = 32$.

③ Le nombre de chaînes binaires 1XXXX00 qui commencent par 1 et se terminent par 00 est $2^4 = 16$.

On a donc $64 + 32 - 16 = 80$ chaînes binaires de longueur sept qui commencent par 1 ou se terminent par 00.

Diagrammes en arbres Des fois on peut se servir de diagrammes en arbres

Ex Combien de chaînes binaires de longueur quatre ne comportent pas deux 1 consécutifs?



Il y a 8 chaînes.

4.2 Principe des nids de pigeon ou principe des tiroirs de Dirichlet

Théo Si $k+1$ objets ou plus sont rangés dans k boîtes, alors il y a au moins une boîte qui contient deux objets ou plus.

Dém Supposons qu'aucune des k boîtes ne contient plus d'un objet. Alors, le nombre total d'objets serait au plus k, contradiction. #

Ex Dans un groupe de 367 personnes il doit y avoir au moins deux personnes qui ont la même date d'anniversaire, car il n'existe que 366 possibilités de dates d'anniversaire.

Ex Dans un groupe de 27 mots français il doit y en avoir au moins deux qui commencent par la même lettre, car il n'y a que 26 lettres dans l'alphabet français.

Principe de nids de pigeon généralisé.

Théo: Si N objets sont rangés dans k boîtes, alors il y a au moins une boîte qui contient au moins $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ objets.

Dém Supposer qu'aucune des boîtes ne contient plus de $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1$ objets. Alors, le nombre total d'objets est au plus

$$k\left(\lceil N/k \rceil - 1\right) < k\left(\left(N/k + 1\right) - 1\right) = N \quad \text{contradiction } \#$$

Ex Parmi 100 personnes il y a au moins $\lceil 100/12 \rceil = 9$ personnes qui sont

NÉES LE MÊME MOIS.

Ex Quel est le nombre minimal de personnes dans un groupe pour garantir qu'il y ait au moins 20 qui sont nées le même mois?

Sol On a que $k=12$ et que $\left\lceil \frac{N}{12} \right\rceil = 20$. On cherche N minimal tel que $\frac{N}{12} > 19$. Comme $12 \cdot 19 = 228$ on a $N = 229$.

Ex On suppose qu'il y a 77 personnes dans un groupe et qu'au moins une personne est née dans chaque mois de l'année. Montrer qu'il y a au moins deux mois tels que le même nombre de personnes du groupe sont nées pendant ces deux mois.

Sol: Supposons que chaque mois a un nombre différent de personnes qui sont nées dans ce mois. Il y a au moins $1+2+\dots+12 = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78$ personnes. Comme il y a 77 personnes dans le groupe, il faut que deux mois aient le même nombre.

Ex: Combien de couples d'entiers (a,b) sont nécessaires pour garantir qu'il y ait deux couples (a_1,b_1) et (a_2,b_2) tel que $a_1 \equiv a_2 \pmod 5$ et $b_1 \equiv b_2 \pmod 5$

Sol: Il y a 25 couples différents modulo 5: $(0,0),(0,1),(0,2),\dots,(4,4)$. Alors, si on prend 26 couples, le principe de nids de pigeon dit qu'il y a deux de ces couples qui sont congrus modulo 5.

Ex Au cours de 30 jours, une équipe de baseball joue au moins 1 match par jour mais pas plus de 45 matchs par mois. Démontrez qu'il doit exister une période d'un certain nombre de jours consécutifs durant laquelle l'équipe doit jouer exactement 14 parties.

Sol Soit a_j = nombre de matchs joués le j-ième jour du mois ou avant ce jour.

$$1 \le a_1 < a_2 < \dots < a_{30} \le 45$$

$$\Rightarrow \quad 15 \le a_1+14 < a_2+14 < \dots < a_{30}+14 \le 59$$

$a_1, a_2, \dots, a_{30}, a_1+14, \dots, a_{30}+14$ sont 60 entiers entre 1 et 59.

Par le principe de nids de pigeons, il y deux de ces entiers qui sont égaux. Disons $a_i = a_j + 14$. L'équipe a joué 14 matchs du jour $j+1$ au jour i.

4.3 Permutations et Combinaisons

Permutations

Déf: Une **permutation** d'un ensemble d'objets distincts est un arrangement ordonné de ces objets. Soit $n, r \in \mathbb{N}$. Une r-permutation d'un ensemble de n objets distincts est un arrangement ordonné de r de ces objets.

Ex: $(1,3,4,2)$, $(3,2,1,4)$ sont des permutations de l'ensemble $S=\{1,2,3,4\}$

$(1,3)$, $(1,2)$, $(4,3)$ sont des 2-permutations de S. Attention, $(3,1)\neq(1,3)$

(1), (2), (3), (4) sont toutes les 1-permutations de S.

Le nombre de r-permutations d'un ensemble à n éléments est noté $P(n,r)$

Théo: $P(n,r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$

Dém: On peut choisir le premier élément de n façons, le deuxième élément de $n-1$ façons, car il doit être différent du premier, le troisième élément de $n-2$ façons, jusqu'à ce qu'il y ait $n-r+1$ façons de choisir le r-ième élément.

Obs $P(n,n)=n!$ le nombre de permutations

Ex: Supposer qu'il y a 8 coureurs dans une course. Le gagnant remporte la médaille d'or, le deuxième reçoit la médaille d'argent, et le troisième la de bronze. De combien de façons peut-on attribuer les médailles si tous les résultats sont possibles?

Sol: Il faut compter les 3-permutations $P(8,3)=8\cdot 7\cdot 6=336$ façons d'attribuer les médailles.

Ex: Combien de chaînes différentes de longueur 8 peut-on former en permutant les lettres ABCDEFGH si chaque chaîne doit contenir ABC?

Sol: Les lettres ABC doivent apparaître dans ce ordre, on peut les considérer comme un seul objet. Il faut donc permuter 6 objets. Il y a $6!=720$ possibilités.

Combinaisons

Déf Soit $n, r \in \mathbb{N}$. Une r-combination d'un ensemble de n objets distincts est une sélection non-ordonnée de r de ces objets. (En d'autres mots, une r-combination est un sous-ensemble ayant r éléments.)

Ex: $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$ sont toutes les 3-combinaisons de l'ensemble $S=\{1,2,3,4\}$

$\{1,3\}$, $\{1,2\}$, $\{3,4\}$... sont des 2-combinaisons de S.

$\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$ sont toutes les 1-combinaisons de S.

Le nombre de r-combinations d'un ensemble à n éléments est noté $C(n,r)$

Ex $C(4,3)=4 \quad C(4,2)=6 \quad C(4,1)=4$

Théo: $C(n,r) = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$

Dém: En ordonnant les éléments dans chaque r-combinaison on obtient les r-permutations. Alors

$$C(n,r)\, r! = P(n,r) \Rightarrow C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\, r!} \quad \#$$

Obs On écrit aussi $\dfrac{n!}{r!\,(n-r)!} = \dbinom{n}{r}$

Coro: Soit $n, r \in \mathbb{N}$, $r \le n$. Alors $C(n,r) = C(n,n-r)$

Obs: $C(n,0) = C(n,n) = 1 \qquad C(n,1) = C(n,n-1) = n$

Ex De combien de façons peut-on sélectionner 4 membres d'un comité entre 146 étudiants?

Sol: $C(146,4) = \dfrac{146 \cdot 145 \cdot 144 \cdot 143}{4!} = 18.163.860$ façons.

Ex. Soit $n, r \in \mathbb{N}$ $r \le n$. Combien y a-t-il de chaînes binaires de longueur n avec exactement r chiffres 1?

Sol: Il faut choisir r places parmi les n places possibles pour les chiffres 1. Il y a donc $C(n,r)$ chaînes binaires possibles.

L'identité de Pascal:

Théo: Soit $n, r \in \mathbb{N}$, $r \le n$, $r \ge 1$. Alors

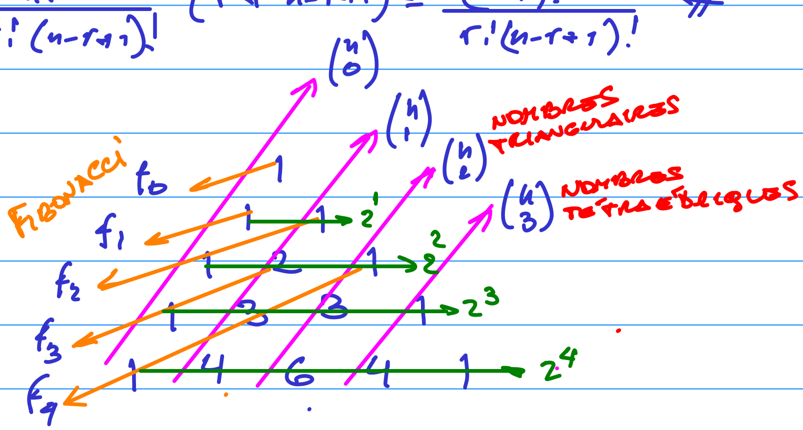
$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

Dém: ① Soit T un ensemble, $|T| = n+1$. Il y a $\binom{n+1}{r}$ sous-ensembles de T de cardinalité r. Soit $a \in T$ fixé. Pour chaque $X \subseteq T$ tel que $|X| = r$, on a que, soit $a \in X$, soit $a \notin X$. Si $a \in X$, il faut choisir $r-1$ éléments de $T \setminus \{a\}$ pour former X, de $\binom{n}{r-1}$ façons. Si $a \notin X$, il faut choisir r éléments de $T \setminus \{a\}$ pour former X, de $\binom{n}{r}$ façons. On conclut en comparant ces deux méthodes de comptage. $\#$

② $$\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!} + \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n!}{r!\,(n-r+1)!}(r + n-r+1) = \frac{(n+1)!}{r!\,(n-r+1)!} \quad \#$$

Le triangle de Pascal.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$



Chaque nombre est égal à la somme des deux nombres au-dessus de la ligne précédente.

La somme de la ligne n-ième du triangle de Pascal est 2^n.

Théo: Soit $n \in \mathbb{N}$ alors $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$

Dém: $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = \#$ de sous-ensembles d'un ensemble S de n éléments $= |\mathcal{P}(S)| = 2^n$. #

Obs: On peut aussi prouver l'identité par induction.

Identité de Vandermonde

Théo: Soit $m,n,r \in \mathbb{N}$ avec $r \leq m,n$. Alors

$$C(m+n,r) = \sum_{k=0}^{r} C(m,k)\, C(n,r-k)$$

Dém: Soit M,N deux ensembles disjoints avec $|M| = m$ et $|N| = n$. Le nombre de sous-ensembles de $M \cup N$ de cardinalité r est $C(m+n,r)$. On peut aussi compter les sous-ensembles de M de cardinalité k et ces de N de cardinalité $r-k$, et faire la somme pour $0 \leq k \leq r$. On conclut en comparant ces deux méthodes de comptage. # **Coro** $\sum_{k=0}^{r} C(r,k)^2 = C(2r,r)$

Théorème du binôme.

Ex $(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Théo: Soit x,y variables et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, x^k y^{n-k}$$

Dém: Le nombre d'éléments de la forme $x^k y^{n-k}$ dans le produit $(x+y)^n$ est donné par choisir k facteurs x (et le reste $n-k$ doivent être y) dans $\underbrace{(x+y)\cdots(x+y)}$. Alors le coefficient de $x^k y^{n-k}$ est donné par $C(n,k)$.

Ex: Quel est le coefficient de

1) $x^{10}y^{15}$ dans $(x+y)^{25}$? $C(25,10) = \dfrac{25!}{10!\,15!} = 3.268.760$

2) x^4y dans $(2x-3y)^5$? $C(5,4) \cdot 2^4(-3)^1 = 5 \cdot 16 \cdot (-3) = -240$

Coro: ① $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n \ \forall n \in \mathbb{N}$,

② $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n,k) = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Dém ① $x = y = 1$ ② $x = -1$, $y = 1$. #

4.6 Permutations et combinaisons généralisées

Permutations avec remise

Ex Combien de chaînes de longueur r peut-on former à partir de l'alphabet?

Sol: On peut former 26^r chaînes.

Théo: Soit $n,r \in \mathbb{N}$. Le nombre de r-permutations d'un ensemble à n éléments avec remise est n^r.

Dém: On a n possibilités pour chacune des r places. Par le principe du produit on obtient n^r possibilités. #

Combinaisons avec remise

Ex De combien de façons pouvez-vous sélectionner six billets dans un sac d'argent contenant des billets de \$5, \$10, \$20, \$50 et \$100 ? Supposez que l'ordre n'a pas d'importance et qu'il y a au moins six billets de chaque type.

Sol: Considérons un tiroir-caisse à cinq compartiments. On indique par un $\times$ le type de billet choisi. Chaque combinaison est représentée comme une suite de six $\times$ et quatre $|$, ex $\times || \times\times | \times\times | \times$. Il faut compter le nombre de chaînes avec six $\times$ et quatre $|$. On a $C(6+4,6)=\frac{10!}{6!4!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{24}=210$ possibilités.

5	10	20	50	100
$\times$		$\times\times$	$\times\times$	$\times$

Théo: Soit $n, r \in \mathbb{N}$. Le nombre de r-combinaisons d'un ensemble à n éléments avec remise est $C(r+n-1,r)$

Dém: Représenter chaque r-combinaison à n éléments avec remise par une liste de $n-1$ barres et de r croix. Les $n-1$ barres représentent n cellules différentes. Une croix est placée dans la i-ème cellule à chaque fois que le i-ème élément d'un ensemble est présent dans la combinaison.

Le nombre de suites est $C(r+n-1,r)$ puisque chaque suite correspond à un choix de r positions pour placer les r croix parmi le total de $r+n-1$ positions possibles.

Ex Une biscuiterie vend cinq différentes sortes de biscuits. De combien de façons différentes peut-on choisir sept biscuits ? Supposez que la sorte de biscuit importe, mais non pas chaque biscuit ou l'ordre dans lequel ils sont choisis et qu'il y a au moins sept biscuits de chaque sorte à la biscuiterie.

Sol On doit choisir 7-combinaisons d'un ensemble de 5 éléments avec remise. On a $C(7+5-1,7)=C(11,4)=\frac{11!}{7!4!}=330$ façons.

Ex Combien de solutions l'équation

$$x_1+x_2+x_3=11$$

admet-elle, où $x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{N}$?

(49)

Mathématiques Discrètes

M Lalín

Sol On pense à distribuer 11 unités en 3 places. On a
$$C(11+3-1,\ 11) = \frac{13\cdot 12}{2} = 78 \quad \text{solutions.}$$

Permutations d'ensembles d'objets indiscernables

Ex: Combien de chaînes différentes peut-on former en ordonnant les lettres du mot ≪ENSEMBLES≫ ?

Sol: On a 9 lettres: 3 E's, 2 S's, 1 B, 1 L, 1 M, 1 N. On peut choisir les places des E's de $C(9,3)$ manières, les places des S's de $C(6,2)$ manières, et les autres de $C(4,1)$, $C(3,1)$, $C(2,1)$, $C(1,1)$ manières. Par le principe du produit on a $C(9,3)\,C(6,2)\,C(4,1)\,C(3,1)\,C(2,1)\,C(1,1) =$
$$= \frac{9!}{3!\,\cancel{6!}}\;\frac{\cancel{6!}}{2!\,\cancel{4!}}\;\frac{\cancel{4!}}{1!\,\cancel{3!}}\;\frac{\cancel{3!}}{1!\,\cancel{2!}}\;\frac{\cancel{2!}}{1!\,\cancel{1!}}\;\frac{\cancel{1!}}{1!\,0!} = \frac{9!}{3!\,2!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 30{,}240 \text{ chaînes}$$

Théo: Le nombre de différentes permutations de n objets, où il y a n_1 objets indiscernables de type 1, n_2 objets indiscernables de type 2, … n_k objets indiscernables de type k (où $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$) est
$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$$

Dém: Choisir n_1 positions pour les objets de type 1 de $C(n,n_1)$ manières, choisir n_2 positions pour les objets de type 2 de $C(n-n_1, n_2)$ manières, On continue jusqu'à n_k positions pour les objets de type k de $C(n-n_1-\dots-n_{k-1}-n_k) = C(n_k,n_k) = 1$ manières. Par le principe du produit,
$$C(n,n_1)\,C(n-n_1,n_2)\cdots C(n-n_1-\dots-n_{k-1},n_k) = \frac{n!}{n_1!\,\cancel{(n-n_1)!}}\;\frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\,\cancel{(n-n_1-n_2)!}}\cdots\frac{\cancel{(n-n_1-\dots-n_{k-1})!}}{n_k!\;0!}$$
$$= \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!} \quad \#$$

Distribution d'objets discernables dans des boîtes discernables

Ex De combien de façons peut-on distribuer des mains de 5 cartes à chacun des quatre joueurs à partir d'un jeu standard de 52 cartes ?

Sol: On choisit les 5 cartes pour le premier joueur de $C(52,5)$ manières. On choisit les 5 cartes pour le deuxième joueur de $C(47,5)$ manières. On a $C(42,5)$ manières pour le troisième joueur et $C(37,5)$ manières pour le quatrième. Par le principe du produit, on a
$$C(52,5)\,C(47,5)\,C(42,5)\,C(37,5) = \frac{52!}{5!\,5!\,5!\,5!\,32!} \text{ manières.}$$

50

Mathématiques Discrètes

M Lalín

Théo: Le nombre de façons de distribuer n objets discernables dans k boîtes discernables de manière telle que n_i objets sont rangés dans la boîte i est égal à $\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$

Dém: On choisit les n_1 objets pour la première boîte de $C(n, n_1)$ manières, les n_2 objets pour la deuxième boîte de $C(n-n_1, n_2)$ manières, et on continue jusqu'à n_k objets pour la k-ième boîte de $C(n-n_1-\cdots-n_{k-1}, n_k) = C(n_k, n_k) = 1$ manières. Par le principe du produit, on a

$$C(n,n_1)\,C(n-n_1,n_2)\cdots C(n-n_1-\cdots-n_{k-1},n_k) = \frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}$$ manières #