MAT1500–Mathématiques discrètes

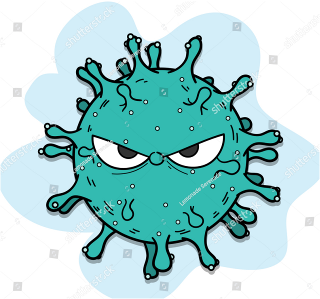
Matilde N. Lalín

Université de Montréal
http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin/mat1500

Le 17 avril 2020

Le menu d'aujourd'hui

- Annonces
- Problèmes de révision des chapitres 4.6, 5.1, 5.2, 5.4, 5.5, A3 du manuel.



Ça va bien aller.

Annonces

- Code d'honneur sur Studium! Il faut le **signer** pour avoir accès à l'examen final.
- Matilde disponible 11h30-13h lundi 20 avril, mercredi 22 avril, jeudi 23 avril et par rendez-vous
- Youcef disponible 13h30-15h30 mercredi 22 avril
- Vladimir disponible 13h30-15h30 jeudi 23 avril

Les instructions de l'examen final

- Dans cet examen, vous avez 20 questions à répondre par choix multiple avec un total de 60 points.
- Le test est disponible le 24 avril 2020 de 13h à 16h15.
- Vous avez un total de 3 heures pour faire l'examen pourvu que vous commenciez l'examen avant 13h15.
- L'examen ferme à 16h15.
- Assurez-vous d'avoir du papier pour vos calculs.
- Vous pouvez vous servir d'une calculatrice simple.
- Vous pouvez vous servir des documents qui se trouvent dans le site web du cours `https://dms.umontreal.ca/ mlalin/mat1500`, et dans le site Studium du cours.
- Vous pouvez vous servir des chapitres du livre qui sont disponibles sur Studium (chapitres 4, 5, et A3), mais vous ne pouvez pas vous servir des autres chapitres du livre ni d'autres documents.
- Faites l'examen par vous-même, sans l'aide d'autres personnes.
- Lisez attentivement les questions.

Problème 4.1.20

Problème : Combien de chaînes de quatre chiffres décimaux

1. ne contiennent pas le même chiffre deux fois ? $P(10, 4) = 5040$
2. se terminent par un chiffre pair ? On a 10^3 façons de choisir les trois premiers chiffres et 5 façons de choisir le dernier. On a $10^3 \cdot 5 = 5000.$
3. ont exactement trois chiffres qui sont des 9 ? Il faut choisir les 3 places pour les 9 de 4 façons et on a 9 choix pour le chiffre qui n'est pas 9. On a $4 \cdot 9 = 36.$

Problème 4.6.28

Problème : Combien de mots différents pouvez-vous former à partir des lettres du mot *AARDVARK* en utilisant toutes les lettres, si les trois A doivent être consécutifs ?

Résolution : On peut penser que les trois A sont un seul symbole. Alors, on a 6 lettres dont 2 sont identiques (les deux R). On a

$$\frac{6!}{2!1!1!1!1!}$$

possibilités.

Problème 4.6.41

Problème : De combien de façons pouvez-vous ranger n livres sur k étagères discernables
(a) si les livres sont des exemplaires indiscernables d'un même titre ?
(b) si aucun de ces livres n'est le même et que la positions des livres sur les étagères importe ?

Résolution : (a) Il faut distribuer n objects indiscernables parmi k boîtes discernables.

$$C(n+k-1, n).$$

(b) Si on ignore les differences parmi les livres, on a le cas (a). Maintenant, si les livres sont différents, il faut les permuter. On obtient

$$C(n+k-1,n)n! = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!} = P(n+k-1,n).$$

Ça va bien aller.

Problème 5.1.18

Problème : (a) Trouvez une relation de récurrence pour le nombre de chaînes binaires de longueur n qui contiennent trois 0 consécutifs.
(b) Quelles sont les conditions initiales ?
(c) Combien y a-t-il de chaînes binaires de longueur 7 qui contiennent trois 0 consécutifs ?

Résolution : (a) Soit a_n le nombre de chaînes de longueur n avec la condition. On peut obtenir une chaîne de longueur n

- à partir d'une chaîne valide de longueur $n-1$, en ajoutant 1.
- à partir d'une chaîne valide de longueur $n-2$, en ajoutant 10.
- à partir d'une chaîne valide de longueur $n-3$, en ajoutant 100.
- à partir d'une chaîne quelconque de longueur $n-3$, en ajoutant 000.

On obtient $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + 2^{n-3}$ avec $n \geq 4$.
(b) $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$. (c) $a_4 = a_3 + a_2 + a_1 + 2 = 1 + 0 + 0 + 2 = 3$,
$a_5 = a_4 + a_3 + a_2 + 2^2 = 3 + 1 + 0 + 4 = 8$,
$a_6 = a_5 + a_4 + a_3 + 2^3 = 8 + 3 + 1 + 8 = 20$,
$a_7 = a_6 + a_5 + a_4 + 2^4 = 20 + 8 + 3 + 16 = 47$.

Problème 5.1.19

Problème : (a) Établissez une relation de récurrence pour le nombre de chaînes binaires de longueur n qui ne contiennent pas trois 0 consécutifs.
(b) Quelles sont les conditions initiales ?
(c) Combien y a-t-il de chaînes binaires de longueur 7 qui ne contiennent pas trois 0 consécutifs ?

Résolution : (a) Soit b_n le nombre de chaînes de longueur n avec la condition. On peut obtenir une chaîne de longueur n

- à partir d'une chaîne valide de longueur $n-1$, en ajoutant 1,
- à partir d'une chaîne valide de longueur $n-2$, en ajoutant 10,
- à partir d'une chaîne valide de longueur $n-3$, en ajoutant 100.

On obtient $b_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}$ avec $n \geq 4$.
(b) $b_1 = 2$, $b_2 = 4$, $b_3 = 7$.
(c) $b_4 = b_3 + b_2 + b_1 = 7 + 4 + 1 = 13$,
$b_5 = b_4 + b_3 + b_2 = 13 + 7 + 4 = 24$,
$b_6 = b_5 + b_4 + b_3 = 24 + 13 + 7 = 44$,
$b_7 = b_6 + b_5 + b_4 = 44 + 24 + 13 = 81$.

La relation entre 5.1.18 et 5.1.19

Notons que $a_n + b_n$ est le total des chaînes binaires de longueur n, donc

$$a_n + b_n = 2^n.$$

On peut se servir de cette relation pour trouver un relation de récurrence à partir de l'autre. Par exemple, si on sait que $b_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}$, on peut remplacer

$$\begin{aligned}
2^n - a_n =& 2^{n-1} - a_{n-1} + 2^{n-2} - a_{n-2} + 2^{n-3} - a_{n-3} \\
2^n - 2^{n-1} - 2^{n-2} - 2^{n-3} =& a_n - a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3} \\
2^{n-3}(8 - 4 - 2 - 1) =& a_n - a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3} \\
2^{n-3} =& a_n - a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3}
\end{aligned}$$

et on obtient

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + 2^{n-3}.$$

Ça va bien aller.

Problème 5.1.30

Problème : Un automobiliste règle ses péages en utilisant seulement des pièces de 5 cents et de 10 cents et en les jetant une à la fois dans la boîte de péage.
(a) Trouvez une relation de récurrence pour calculer le nombre de différentes façons que l'automobiliste peut régler un péage de n cents (si l'ordre dans lequel les pièces sont jetées dans la boîte de péage est important).
(b) De combien de façons différentes l'automobiliste peut-il régler un péage de 45 cents ?

Résolution : (a) Soit a_n le nombre de façons de régler un péage de $5n$. Si la dernière pièce est 5 cents, l'automobiliste a payé d'abord $5(n-1)$. Si la dernière pièce est 10 cents, l'automobiliste a payé d'abord $5(n-2)$. On a donc, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 3$. En plus, on a $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.
(b) $45 = 5 \cdot 9$, donc il faut trouver a_9. On a $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$, $a_6 = 13$, $a_7 = 21$, $a_8 = 34$, et $a_9 = 55$.

Problème 5.2.4

Problème : Résolvez les relations de récurrence suivantes avec les conditions initiales données.

(b) $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$ pour $n \geq 2$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$.

Résolution : On a $r^2 - 7r + 10 = 0$ et on trouve $r = 2, 5$. Alors $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 5^n$. On a

$$\begin{cases} 2 = & \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 = & \alpha_1 2 + \alpha_2 5 \end{cases}$$

En faisant la $2l_1 - l_2$, on trouve $3 = -3\alpha_2$, donc $\alpha_2 = -1$, $\alpha_1 = 3$.

$$a_n = 3 \cdot 2^n - 5^n.$$

Problème 5.2.14

Problème : Trouvez la solution de $a_n = 5a_{n-2} - 4a_{n-4}$ avec $a_0 = 3, a_1 = 2, a_2 = 6$ et $a_3 = 8$.

Résolution : On a $r^4 - 5r^2 + 4 = 0$ et on trouve $r^2 = 4, 1$ et donc $r = \pm 1, \pm 2$. Alors $a_n = \alpha_1 + \alpha_2(-1)^n + \alpha_3 2^n + \alpha_4(-2)^n$. On a

$$\begin{cases} 3 = & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ 2 = & \alpha_1 + \alpha_2(-1) + \alpha_3 2 + \alpha_4(-2) \\ 6 = & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 4 + \alpha_4 4 \\ 8 = & \alpha_1 + \alpha_2(-1) + \alpha_3 8 + \alpha_4(-8) \end{cases}$$

On trouve $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ et $\alpha_4 = 0$.

$$a_n = 1 + (-1)^n + 2^n.$$

Ça va bien aller.

Problème 5.2.26

Problème : Démontrez que si $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_0 = s$ et $a_1 = t$, où s et t sont des constantes, alors $a_n = sf_{n-1} + tf_n$ pour tous les nombres entiers positifs n.

Résolution : Soit $P(n) = \ll a_n = sf_{n-1} + tf_n \gg$. Si $n = 1$, on a $a_1 = sf_0 + tf_1 = s \cdot 0 + t \cdot 1 = t$. Si $n = 2$, on a que $a_2 = a_0 + a_1 = s + t$ et $sf_1 + tf_2 = s + t$. Donc $P(n)$ est V pour $n = 1, 2$. Supposons que $P(m)$ est V pour tout $m \leq n$. On a que

$$\begin{aligned} a_{n+1} =& a_n + a_{n-1} \\ =& sf_{n-1} + tf_n + sf_{n-2} + tf_{n-1} \\ =& s(f_{n-1} + f_{n-2}) + t(f_n + f_{n-1}) \\ =& sf_n + tf_{n+1}. \end{aligned}$$

Par conséquent $P(n+1)$ et le résultat est V pour $P(n)$ et $n \geq 1$ par induction généralisée.

Problème 5.4.13

Problème : Combien existe-t-il de chaînes binaires de longueur huit qui ne contiennent pas six 0 consécutifs ?

Résolution : Les chaînes binaires de la forme $000000XX$, $X000000X$, et $XX000000$ sont 3 fois 4.
On a que $000000XX \cap X000000X = 0000000X$,
$X000000X \cap XX000000 = X0000000$, et
$000000XX \cap XX000000 = 00000000$.
Finalement, la chaîne binaire de la forme 00000000 se trouve à l'intersection de tout.
Nous avons

$$3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 - 1 + 1 = 8$$

chaînes binaires avec six ou plus 0 consécutifs.
Donc, il y a

$$2^8 - 8 = 248$$

chaînes binaires qui ne contiennent pas six 0 consécutifs.

Problème 5.4.18

Problème : Combien y a-t-il de termes dans la formule pour calculer le nombre d'éléments de l'union de 10 ensembles selon le principe d'inclusion-exclusion ?

Résolution : Le calcul qu'il faut faire est

$$\sum_{i=1}^{10} |A_i| - \sum_{1\leq i<j\leq 10} |A_i \cap A_j| + \cdots - |A_1 \cap \cdots \cap A_{10}|.$$

Il y a

$$C(10,1) + C(10,2) + \cdots + C(10,10) = 2^{10} - C(10,0) = 2^{10} - 1 = 1023$$

termes dans le calcul.

Problème 5.4.20

Problème : Combien y a-t-il d'éléments dans l'union de cinq ensembles si les ensembles contiennent 10.000 éléments chacun, si chaque paire a 1.000 éléments en commun, chaque triplet a 100 éléments en commun, chaque quadruplet a 10 éléments en commun et qu'il y a un élément qui appartient à chacun des cinq ensembles ?

Résolution : Il y a

$$
\begin{aligned}
& C(5,1)10000 - C(5,2)1000 + C(5,3)100 - C(5,4)10 + C(5,5)1 \\
=& C(5,1)10^4 - C(5,2)10^3 + C(5,3)10^2 - C(5,4)10 + C(5,5)1 \\
=& -\big(C(5,1)10^4(-1) + C(5,2)10^3(-1)^2 + C(5,3)10^2(-1)^3 \\
& + C(5,4)10(-1)^4 + C(5,5)(-1)^5\big) \\
=& -((10-1)^5 - 10^5) \text{ binôme!} \\
=& 10^5 - 9^5
\end{aligned}
$$

éléments dans l'union.

Problème 5.5.3

Problème : Combien y a-t-il de solutions entières à l'équation

$$y_1 + y_2 + y_3 = 13$$

si y_1, y_2 et y_3 sont des entiers non négatifs plus petits que 6 ?

Résolution : Sans restriction on a $C(13+3-1, 13) = C(15, 13) = 105$ solutions.
Si une des variables est ≥ 6, nous avons $C(7+3-1, 7) = C(9, 7) = 36$ solutions.
Si deux variables sont ≥ 6, nous avons $C(1+3-1, 1) = C(3, 1) = 3$ solutions.
On ne peut avoir trois variables ≥ 6.
On a donc

$$105 - 36C(3,1) + 3C(3,2) = 105 - 36 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 6$$

solutions.

Problème 5.5.11

Problème : De combien de façons pouvez-vous attribuer sept tâches différentes à quatre employés de sorte que chaque employé reçoive au moins une tâche et que la tâche la plus difficile soit attribuée au meilleur employé ?

Résolution : Sans la condition sur la tâches la plus difficile, on a

$$4^7 - C(4,1)3^7 + C(4,2)2^7 - C(4,3)1^7 = 8400$$

façons d'attribuer les tâches. Par symétrie, dans $1/4$ des ces façons, la tâche la plus difficile est attribuée au meilleur l'employé. On a donc

$$2100$$

manières.

Problème 5.5.17

Problème : De combien de façons les chiffres $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ peuvent-ils être distribués de sorte qu'aucun chiffre pair ne se retrouve dans sa position originale ?

Résolution : On peut faire le même que pour les dérangements, mais en regardant seulement les chiffres pairs. Il y a $10!$ permutations.

- Le nombre de permutations dont un chiffre pair est à sa position initiale est $9!$, et il y a 5 termes de ce type (5 chiffres pairs).
- Le nombre de permutations dont 2 des chiffres pairs sont fixés est $8!$, et il y a $C(5, 2)$ possibilités.
- Le nombre de permutations dont 3 des chiffres pairs sont fixés est $7!$, et il y a $C(5, 3)$ possibilités.
- Le nombre de permutations dont 4 des chiffres pairs sont fixés est $6!$, et il y a $C(5, 4)$ possibilités.
- Le nombre de permutations dont 5 des chiffres pairs sont fixés est $5!$, et il y a $C(5, 5)$ possibilités.

Ça va bien aller.

Problème 5.5.17

Problème : De combien de façons les chiffres $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ peuvent-ils être distribués de sorte qu'aucun chiffre pair ne se retrouve dans sa position orignale ?

Résolution (continuation) : On obtient

$$10! - C(5,1)9! + C(5,2)8! - C(5,3)7! + C(5,4)6! - C(5,5)5! = 2.170.680$$

façons.

Problème 5.5.25

Problème : Combien y a-t-il de dérangements de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ qui commencent avec les nombres entiers $1, 2$ et 3 dans un orde quelconque ?

Résolution : On doit faire un dérangement de $\{1, 2, 3\}$ et un dérangement de $\{4, 5, 6\}$. On a que

$$D_3 = 3!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) = 6\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = 2.$$

Par conséquent, il y a

$$D_3^2 = 2^2 = 4$$

dérangements avec les conditions demandées.

Ça va bien aller.

Problème A.3.7

Problème : Quelle est la fonction génératrice pour a_k, où a_k est le nombre de solutions de

$$y_1 + y_2 + y_3 = k,$$

où y_1, y_2, et y_3 sont des entiers avec $y_1 \geq 2$, $0 \leq y_2 \leq 3$ et $2 \leq y_3 \leq 5$?

Résolution :

$$\begin{aligned}
&(x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x + x^2 + x^3)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)\\
=&\frac{x^2}{1-x}(1 + x + x^2 + x^3)x^2(1 + x + x^2 + x^3)\\
=&\frac{x^4(1 + x + x^2 + x^3)^2}{1-x}\\
=&\frac{x^4(1+x)^2(1+x^2)^2}{1-x} \quad |x| < 1.
\end{aligned}$$

Problème A.3.9

Problème : Trouvez une expression simple pour la fonction génératrice de $\{a_k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ si
(a) $a_k = 3$, (b) $a_k = 5^k$, (c) $a_k = k + 1$.

Résolution :

(a) $3 + 3x + 3x^2 + 3x^3 \cdots = \dfrac{3}{1-x}, \; |x| < 1.$

(b) $1 + 5x + 5^2x^2 + 5^3x^3 + \cdots = \dfrac{1}{1-5x}, \; |5x| < 1.$

(c) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{(1-x)^2}, \; |x| < 1.$

Ça va bien aller.

Problème A.3.13

Problème : Utilisez une fonction génératrice pour résoudre la relation de récurrence $a_k = 3a_{k-1} + 4^{k-1}$ avec la condition initiale $a_0 = 1$.

Résolution : Soit $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.
On a que

$$\begin{aligned} G(x) - 3xG(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} 3a_k x^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 3a_{k-1} x^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - 3a_{k-1}) x^k \end{aligned}$$

Ça va bien aller.

Problème A.3.13

Problème : Utilisez une fonction génératrice pour résoudre la relation de récurrence $a_k = 3a_{k-1} + 4^{k-1}$ avec la condition initiale $a_0 = 1$.

Résolution (continuation) :

$$\begin{aligned} G(x)(1-3x) =& 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - 3a_{k-1})x^k \\ =& 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 4^{k-1}x^k \\ =& 1 + \frac{x}{1-4x} = \frac{1-3x}{1-4x} \end{aligned}$$

Donc,

$$G(x) = \frac{1-3x}{(1-3x)(1-4x)} = \frac{1}{1-4x}.$$

Par conséquent, $a_k = 4^k$.

Problème A.3.14

Problème : Utilisez une fonction génératrice pour résoudre la relation de récurrence $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$ avec les conditions initiales $a_0 = 1$ et $a_1 = 30$.

Résolution : Soit $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Alors,

$$xG(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}x^k, \qquad x^2G(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2}x^k$$

$$\begin{aligned} G(x) - 5xG(x) + 6x^2G(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - 5\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}x^k + 6\sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2}x^k \\ &= a_0 + (a_1 - 5a_0)x \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty}(a_k - 5a_{k-1} + 6a_{k-2})x^k \\ &= 1 + (30-5)x = 1 + 25x \end{aligned}$$

Problème A.3.14

Résolution (continuation) :

$$G(x) = \frac{1+25x}{1-5x+6x^2}$$

$$\begin{aligned} 1-5x+6x^2 &= x^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x}+6\right) = x^2\left(\frac{1}{x}-2\right)\left(\frac{1}{x}-3\right) \\ &= (1-2x)(1-3x) \end{aligned}$$

$$G(x) = (1+25x)\left(\frac{3}{1-3x}-\frac{2}{1-2x}\right)$$

Problème A.3.14

$$
\begin{aligned}
G(x) &= (1+25x)\left(\frac{3}{1-3x}-\frac{2}{1-2x}\right)\\
&= (1+25x)\sum_{k=0}^{\infty}\left(3^{k+1}-2^{k+1}\right)x^k\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(3^{k+1}-2^{k+1}\right)x^k+25\sum_{k=0}^{\infty}\left(3^{k+1}-2^{k+1}\right)x^{k+1}\\
&= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(3^{k+1}-2^{k+1}\right)x^k+25\sum_{k=1}^{\infty}\left(3^{k}-2^{k}\right)x^k\\
&= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(28\cdot 3^{k}-27\cdot 2^{k}\right)x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(28\cdot 3^{k}-27\cdot 2^{k}\right)x^k
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow a_k = 28\cdot 3^k - 27\cdot 2^k.$$

Problème 1.6.28

Problème : Démontrez que $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$.

Résolution : Soit $n = \lceil x \rceil$. Donc

$$n - 1 < x \leq n.$$

En multipliant par -1,

$$1 - n > -x \geq -n.$$

Cela implique que

$$-n = \lfloor -x \rfloor.$$

Problème 3.1.26

Problème : Démontrez ou réfutez que $n^2 - 1$ est un nombre composé lorsque n est un entier positif plus grand que 1.

Résolution : C'est faux. Par exemple, $2^2 - 1 = 3$ est premier.

Cependant, c'est vrai que $n^2 - 1$ est composé lorsque n est plus grand que 2.
Pour le voir, écrivons

$$n^2 - 1 = (n-1)(n+1).$$

Si $n > 2$, on a que $n-1, n+1 > 1$ et la factorisation est non-triviale, donc $n^2 - 1$ est composé.

Problème 3.1.30

Problème : Prouvez que si n est un entier positif tel que la somme de ses diviseurs est $n+1$, alors n est premier. Quel type de preuve avez-vous avancé ?

Résolution : On va donner une preuve indirecte. Si $n = 1$, la somme de ses diviseurs est 1, et $1 \neq 1+1 = n+1$.
Si n est composé, on a que $n = ab$ avec $1 < a, b < n$. Il se peut que $a = b$. Donc n a au moins 3 diviseurs différents, c'est-à-dire, $1, a, n$.
La somme des diviseurs de n est $\geq 1 + a + n > 1 + n$. On obtient une contradiction.
Par conséquent, n doit être premier.

Problème 3.1.34

Problème : Prouvez que si n est un entier, les trois énoncés suivants sont équivalents :
(i) 5 divise n, (ii) 5 divise n^2, (iii) $n^2 \not\equiv \pm 1 \pmod 5$.

Résolution : (i) $\Rightarrow$ (ii): Supposons que $5 \mid n$. Alors, $n = 5k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Donc $n^2 = 5^2 k^2 = 5(5k^2)$. Par conséquent, $5 \mid n^2$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Supposons que $5 \mid n^2$. Donc $n^2 \equiv 0 \pmod 5$. Par conséquent, $n^2 \not\equiv \pm 1 \pmod 5$.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Preuve indirecte. Supposons que $5 \nmid n$. Alors, la division de n par 5 donne $n = 5k + r$ avec $r = 1, 2, 3$ ou 4. Mais

$$\begin{array}{lll} n \equiv 1 \pmod 5 & \Rightarrow & n^2 \equiv 1 \pmod 5 \\ n \equiv 2 \pmod 5 & \Rightarrow & n^2 \equiv 4 \equiv -1 \pmod 5 \\ n \equiv 3 \pmod 5 & \Rightarrow & n^2 \equiv 4 \equiv -1 \pmod 5 \\ n \equiv -1 \pmod 5 & \Rightarrow & n^2 \equiv 1 \pmod 5 \end{array}$$

On a que $n^2 \equiv \pm 1 \pmod 5$, contradiction.

Problème 3.2.18

Problème : Prouvez que

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

lorsque n est un entier positif plus grand que 1.

Résolution : Soit $P(n)$ la fonction propositionnelle à prouver pour $n > 1$. $P(n)$ est V parce que $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} < \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2}$. Supposons que $P(n)$ est V

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} &< 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} = 2 - \frac{n^2 + 2n + 1 - n}{n(n+1)^2} \\
&= 2 - \frac{n^2 + n}{n(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)^2} \\
&= 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)^2} < 2 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Problème 5.1.24

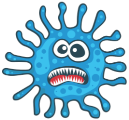
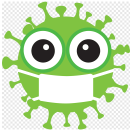
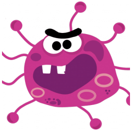
Problème : (a) Trouvez une relation de récurrence pour le nombre de chaînes ternaires qui contiennent deux 0 consécutifs.
(b) Quelles sont les conditions initiales ?
(c) Combien y a-t-il de chaînes ternaires de longueur 6 qui contiennent deux 0 consécutifs ?

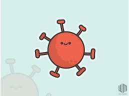
Résolution : (a) Soit a_n le nombre de chaînes de longueur n qui satisfont l'identité. On a

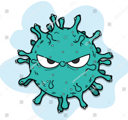
$$\begin{aligned} a_n =& \text{chaînes qui ne finissent pas par } 0 + \text{chaînes qui finissent par } 0 \\ =& 2a_{n-1} + \text{chaînes qui finissent par } X0 + \text{chaînes qui finissent par } 00 \\ =& 2a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3^{n-2} \end{aligned}$$

(b) $a_1 = 0$, $a_2 = 1$
(c) $a_3 = 5$, $a_4 = 21$, $a_5 = 79$, $a_6 = 281$.

Merci!






Merci de votre participation au cours!!!