

MAT1500–Mathématiques discrètes

Matilde N. Lalín

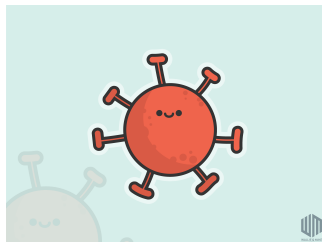
Université de Montréal

<http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin/mat1500>

Le 14 avril 2020

Le menu d'aujourd'hui

- Annonces
- Problèmes de révision des chapitres 3.3, 4.1, 4.2, 4.3, 4.6, du manuel.



Annonces

- Problèmes de révision sur
<http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin/mat1500>

Annonces

- Problèmes de révision sur <http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin/mat1500>
- **Test bidon** disponible sur [Studium](#).

Annonces

- Problèmes de révision sur <http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin/mat1500>
- **Test bidon** disponible sur **Studium**.

- **Code d'honneur sur Studium!** Il faut le **signer** pour avoir accès à l'examen final.

Les instructions de l'examen final

- Dans cet examen, vous avez 20 questions à répondre par choix multiple avec un total de 60 points.

Les instructions de l'examen final

- Dans cet examen, vous avez 20 questions à répondre par choix multiple avec un total de 60 points.
- Le test est disponible le 24 avril 2020 de 13h à 16h15.
- Vous avez un total de 3 heures pour faire l'examen pourvu que vous commenciez l'examen avant 13h15.
- L'examen ferme à 16h15.

Les instructions de l'examen final

- Dans cet examen, vous avez 20 questions à répondre par choix multiple avec un total de 60 points.
- Le test est disponible le 24 avril 2020 de 13h à 16h15.
- Vous avez un total de 3 heures pour faire l'examen pourvu que vous commenciez l'examen avant 13h15.
- L'examen ferme à 16h15.
- Assurez-vous d'avoir du papier pour vos calculs.
- Vous pouvez vous servir d'une calculatrice simple.

Les instructions de l'examen final

- Dans cet examen, vous avez 20 questions à répondre par choix multiple avec un total de 60 points.
- Le test est disponible le 24 avril 2020 de 13h à 16h15.
- Vous avez un total de 3 heures pour faire l'examen pourvu que vous commenciez l'examen avant 13h15.
- L'examen ferme à 16h15.
- Assurez-vous d'avoir du papier pour vos calculs.
- Vous pouvez vous servir d'une calculatrice simple.
- Vous pouvez vous servir des documents qui se trouvent dans le site web du cours <https://dms.umontreal.ca/mlalin/mat1500>, et dans le site Studium du cours.
- Vous pouvez vous servir des chapitres du livre qui sont disponibles sur Studium (chapitres 4, 5, et A3), mais vous ne pouvez pas vous servir des autres chapitres du livre ni d'autres documents.

Les instructions de l'examen final

- Dans cet examen, vous avez 20 questions à répondre par choix multiple avec un total de 60 points.
- Le test est disponible le 24 avril 2020 de 13h à 16h15.
- Vous avez un total de 3 heures pour faire l'examen pourvu que vous commenciez l'examen avant 13h15.
- L'examen ferme à 16h15.
- Assurez-vous d'avoir du papier pour vos calculs.
- Vous pouvez vous servir d'une calculatrice simple.
- Vous pouvez vous servir des documents qui se trouvent dans le site web du cours <https://dms.umontreal.ca/mlalin/mat1500>, et dans le site Studium du cours.
- Vous pouvez vous servir des chapitres du livre qui sont disponibles sur Studium (chapitres 4, 5, et A3), mais vous ne pouvez pas vous servir des autres chapitres du livre ni d'autres documents.
- Faites l'examen par vous-même, sans l'aide d'autres personnes.
- Lisez attentivement les questions.

Problème 3.2.22

Problème : Quelles sommes d'argent pouvez-vous former en utilisant des pièces de 10 et de 25 cents ? Prouvez votre réponse en utilisant l'une des formes du principe de l'induction.

Résolution :

Problème 3.2.22

Problème : Quelles sommes d'argent pouvez-vous former en utilisant des pièces de 10 et de 25 cents ? Prouvez votre réponse en utilisant l'une des formes du principe de l'induction.

Résolution : On peut former les 10 cents, et toutes les multiples de 5 cents à partir de 20 cents.

Problème 3.2.22

Problème : Quelles sommes d'argent pouvez-vous former en utilisant des pièces de 10 et de 25 cents ? Prouvez votre réponse en utilisant l'une des formes du principe de l'induction.

Résolution : On peut former les 10 cents, et toutes les multiples de 5 cents à partir de 20 cents. Soit $P(n) = \ll \text{on peut former } 5n \gg$, $P(2)$ est V parce que $10 = 1 \cdot 10$ et on veut prouver $P(n)$ est V pour $n \geq 4$.

Problème 3.2.22

Problème : Quelles sommes d'argent pouvez-vous former en utilisant des pièces de 10 et de 25 cents ? Prouvez votre réponse en utilisant l'une des formes du principe de l'induction.

Résolution : On peut former les 10 cents, et toutes les multiples de 5 cents à partir de 20 cents. Soit $P(n) = \ll \text{on peut former } 5n \gg$, $P(2)$ est V parce que $10 = 1 \cdot 10$ et on veut prouver $P(n)$ est V pour $n \geq 4$. $P(4)$ est V parce que $20 = 2 \cdot 10$.

Problème 3.2.22

Problème : Quelles sommes d'argent pouvez-vous former en utilisant des pièces de 10 et de 25 cents ? Prouvez votre réponse en utilisant l'une des formes du principe de l'induction.

Résolution : On peut former les 10 cents, et toutes les multiples de 5 cents à partir de 20 cents. Soit $P(n) = \ll \text{on peut former } 5n \gg$, $P(2)$ est V parce que $10 = 1 \cdot 10$ et on veut prouver $P(n)$ est V pour $n \geq 4$. $P(4)$ est V parce que $20 = 2 \cdot 10$. Supposons que $P(n)$ est V.

Problème 3.2.22

Problème : Quelles sommes d'argent pouvez-vous former en utilisant des pièces de 10 et de 25 cents ? Prouvez votre réponse en utilisant l'une des formes du principe de l'induction.

Résolution : On peut former les 10 cents, et toutes les multiples de 5 cents à partir de 20 cents. Soit $P(n) = \ll \text{on peut former } 5n \gg$, $P(2)$ est V parce que $10 = 1 \cdot 10$ et on veut prouver $P(n)$ est V pour $n \geq 4$. $P(4)$ est V parce que $20 = 2 \cdot 10$. Supposons que $P(n)$ est V.

Si $5n = r10 + s25$ avec $s > 0$, on a $5(n + 1) = (r + 3)10 + (s - 1)25$ et $P(n + 1)$ est V.

Problème 3.2.22

Problème : Quelles sommes d'argent pouvez-vous former en utilisant des pièces de 10 et de 25 cents ? Prouvez votre réponse en utilisant l'une des formes du principe de l'induction.

Résolution : On peut former les 10 cents, et toutes les multiples de 5 cents à partir de 20 cents. Soit $P(n) = \ll \text{on peut former } 5n \gg$, $P(2)$ est V parce que $10 = 1 \cdot 10$ et on veut prouver $P(n)$ est V pour $n \geq 4$. $P(4)$ est V parce que $20 = 2 \cdot 10$. Supposons que $P(n)$ est V.

Si $5n = r10 + s25$ avec $s > 0$, on a $5(n+1) = (r+3)10 + (s-1)25$ et $P(n+1)$ est V.

Si $5n = r10$ avec $r > 1$ et $5(n+1) = (r-2)10 + 25$ et $P(n+1)$ est V.

Problème 3.2.22

Problème : Quelles sommes d'argent pouvez-vous former en utilisant des pièces de 10 et de 25 cents ? Prouvez votre réponse en utilisant l'une des formes du principe de l'induction.

Résolution : On peut former les 10 cents, et toutes les multiples de 5 cents à partir de 20 cents. Soit $P(n) = \ll \text{on peut former } 5n \gg$, $P(2)$ est V parce que $10 = 1 \cdot 10$ et on veut prouver $P(n)$ est V pour $n \geq 4$. $P(4)$ est V parce que $20 = 2 \cdot 10$. Supposons que $P(n)$ est V.

Si $5n = r10 + s25$ avec $s > 0$, on a $5(n + 1) = (r + 3)10 + (s - 1)25$ et $P(n + 1)$ est V.

Si $5n = r10$ avec $r > 1$ et $5(n + 1) = (r - 2)10 + 25$ et $P(n + 1)$ est V. Alors, $P(n)$ implique $P(n + 1)$ et $P(n)$ est V pour $n \geq 4$ par induction (et $P(2)$ est V aussi).

Problème 5.5.8

Problème : Combien y a-t-il de fonctions surjectives d'un ensemble à sept éléments dans un ensemble à cinq éléments ?

Résolution :

Problème 5.5.8

Problème : Combien y a-t-il de fonctions surjectives d'un ensemble à sept éléments dans un ensemble à cinq éléments ?

Résolution : On prouvera que le nombre est

$$5^7 - C(5, 1)4^7 + C(5, 2)3^7 - C(5, 3)2^7 + C(5, 4)1^7 = 16.800.$$

Problème 5.5.8

Problème : Combien y a-t-il de fonctions surjectives d'un ensemble à sept éléments dans un ensemble à cinq éléments ?

Résolution : On prouvera que le nombre est

$$5^7 - C(5, 1)4^7 + C(5, 2)3^7 - C(5, 3)2^7 + C(5, 4)1^7 = 16.800.$$

Soit

$$P_i = \{f : \{a_1, \dots, a_7\} \rightarrow \{b_1, \dots, b_5\} \mid b_i \notin \text{Im}(f)\}.$$

On a donc que f est surjective si et seulement si $f \in P'_1 \dots P'_5$.

Problème 5.5.8

Problème : Combien y a-t-il de fonctions surjectives d'un ensemble à sept éléments dans un ensemble à cinq éléments ?

Résolution : On prouvera que le nombre est

$$5^7 - C(5, 1)4^7 + C(5, 2)3^7 - C(5, 3)2^7 + C(5, 4)1^7 = 16.800.$$

Soit

$$P_i = \{f : \{a_1, \dots, a_7\} \rightarrow \{b_1, \dots, b_5\} \mid b_i \notin \text{Im}(f)\}.$$

On a donc que f est surjective si et seulement si $f \in P'_1 \dots P'_5$.

Le total de fonctions est $N = 5^7$,

Problème 5.5.8

Problème : Combien y a-t-il de fonctions surjectives d'un ensemble à sept éléments dans un ensemble à cinq éléments ?

Résolution : On prouvera que le nombre est

$$5^7 - C(5, 1)4^7 + C(5, 2)3^7 - C(5, 3)2^7 + C(5, 4)1^7 = 16.800.$$

Soit

$$P_i = \{f : \{a_1, \dots, a_7\} \rightarrow \{b_1, \dots, b_5\} \mid b_i \notin \text{Im}(f)\}.$$

On a donc que f est surjective si et seulement si $f \in P'_1 \dots P'_5$.

Le total de fonctions est $N = 5^7$, $N(P_i) = 4^7$ et il y a $C(5, 1)$ termes de ce type,

Problème 5.5.8

Problème : Combien y a-t-il de fonctions surjectives d'un ensemble à sept éléments dans un ensemble à cinq éléments ?

Résolution : On prouvera que le nombre est

$$5^7 - C(5, 1)4^7 + C(5, 2)3^7 - C(5, 3)2^7 + C(5, 4)1^7 = 16.800.$$

Soit

$$P_i = \{f : \{a_1, \dots, a_7\} \rightarrow \{b_1, \dots, b_5\} \mid b_i \notin \text{Im}(f)\}.$$

On a donc que f est surjective si et seulement si $f \in P'_1 \dots P'_5$.

Le total de fonctions est $N = 5^7$, $N(P_i) = 4^7$ et il y a $C(5, 1)$ termes de ce type, $N(P_i P_j) = 3^7$ et il y a $C(5, 2)$ termes de ce type, ...

Problème 5.5.8

Problème : Combien y a-t-il de fonctions surjectives d'un ensemble à sept éléments dans un ensemble à cinq éléments ?

Résolution : On prouvera que le nombre est

$$5^7 - C(5, 1)4^7 + C(5, 2)3^7 - C(5, 3)2^7 + C(5, 4)1^7 = 16.800.$$

Soit

$$P_i = \{f : \{a_1, \dots, a_7\} \rightarrow \{b_1, \dots, b_5\} \mid b_i \notin \text{Im}(f)\}.$$

On a donc que f est surjective si et seulement si $f \in P'_1 \dots P'_5$.

Le total de fonctions est $N = 5^7$, $N(P_i) = 4^7$ et il y a $C(5, 1)$ termes de ce type, $N(P_i P_j) = 3^7$ et il y a $C(5, 2)$ termes de ce type, ...

$N(P_1 \dots \widehat{P}_j \dots P_5) = 1^7$ (la notation \widehat{P}_j indique qu'il faut enlever le terme) et il y a $C(5, 4)$ termes de ce type

Problème 5.5.8

Problème : Combien y a-t-il de fonctions surjectives d'un ensemble à sept éléments dans un ensemble à cinq éléments ?

Résolution : On prouvera que le nombre est

$$5^7 - C(5, 1)4^7 + C(5, 2)3^7 - C(5, 3)2^7 + C(5, 4)1^7 = 16.800.$$

Soit

$$P_i = \{f : \{a_1, \dots, a_7\} \rightarrow \{b_1, \dots, b_5\} \mid b_i \notin \text{Im}(f)\}.$$

On a donc que f est surjective si et seulement si $f \in P'_1 \dots P'_5$.

Le total de fonctions est $N = 5^7$, $N(P_i) = 4^7$ et il y a $C(5, 1)$ termes de ce type, $N(P_i P_j) = 3^7$ et il y a $C(5, 2)$ termes de ce type, ...

$N(P_1 \dots \widehat{P}_j \dots P_5) = 1^7$ (la notation \widehat{P}_j indique qu'il faut enlever le terme) et il y a $C(5, 4)$ termes de ce type et $N(P_1 \dots P_5) = 0$.

Problème 5.5.8

Problème : Combien y a-t-il de fonctions surjectives d'un ensemble à sept éléments dans un ensemble à cinq éléments ?

Résolution : On prouvera que le nombre est

$$5^7 - C(5, 1)4^7 + C(5, 2)3^7 - C(5, 3)2^7 + C(5, 4)1^7 = 16.800.$$

Soit

$$P_i = \{f : \{a_1, \dots, a_7\} \rightarrow \{b_1, \dots, b_5\} \mid b_i \notin \text{Im}(f)\}.$$

On a donc que f est surjective si et seulement si $f \in P'_1 \dots P'_5$.

Le total de fonctions est $N = 5^7$, $N(P_i) = 4^7$ et il y a $C(5, 1)$ termes de ce type, $N(P_i P_j) = 3^7$ et il y a $C(5, 2)$ termes de ce type, ...

$N(P_1 \dots \hat{P}_j \dots P_5) = 1^7$ (la notation \hat{P}_j indique qu'il faut enlever le terme) et il y a $C(5, 4)$ termes de ce type et $N(P_1 \dots P_5) = 0$.

En appliquant la formule d'inclusion-exclusion, nous obtenons le résultat.

Problème 3.3.14

Problème : Démontrez que $f_0 - f_1 + f_2 - \cdots - f_{2n-1} + f_{2n} = f_{2n-1} - 1$ lorsque n est un entier positif.

Résolution :

Problème 3.3.14

Problème : Démontrez que $f_0 - f_1 + f_2 - \cdots - f_{2n-1} + f_{2n} = f_{2n-1} - 1$ lorsque n est un entier positif.

Résolution : $P(1)$ est V, parce que $f_0 - f_1 + f_2 = 0 - 1 + 1 = 0$ et $f_1 - 1 = 1 - 1 = 0$.

Problème 3.3.14

Problème : Démontrez que $f_0 - f_1 + f_2 - \cdots - f_{2n-1} + f_{2n} = f_{2n-1} - 1$ lorsque n est un entier positif.

Résolution : $P(1)$ est V, parce que $f_0 - f_1 + f_2 = 0 - 1 + 1 = 0$ et $f_1 - 1 = 1 - 1 = 0$. Supposons que $P(n)$ est V.

Problème 3.3.14

Problème : Démontrez que $f_0 - f_1 + f_2 - \cdots - f_{2n-1} + f_{2n} = f_{2n-1} - 1$ lorsque n est un entier positif.

Résolution : $P(1)$ est V, parce que $f_0 - f_1 + f_2 = 0 - 1 + 1 = 0$ et $f_1 - 1 = 1 - 1 = 0$. Supposons que $P(n)$ est V. Nous avons

$$f_0 - f_1 + f_2 - \cdots - f_{2n-1} + f_{2n} - f_{2n+1} + f_{2n+2} = f_{2n-1} - 1 - f_{2n+1} + f_{2n+2}$$

Problème 3.3.14

Problème : Démontrez que $f_0 - f_1 + f_2 - \cdots - f_{2n-1} + f_{2n} = f_{2n-1} - 1$ lorsque n est un entier positif.

Résolution : $P(1)$ est V, parce que $f_0 - f_1 + f_2 = 0 - 1 + 1 = 0$ et $f_1 - 1 = 1 - 1 = 0$. Supposons que $P(n)$ est V. Nous avons

$$\begin{aligned} f_0 - f_1 + f_2 - \cdots - f_{2n-1} + f_{2n} - f_{2n+1} + f_{2n+2} &= f_{2n-1} - 1 - f_{2n+1} + f_{2n+2} \\ &= f_{2n-1} - 1 + f_{2n} \end{aligned}$$

Problème 3.3.14

Problème : Démontrez que $f_0 - f_1 + f_2 - \cdots - f_{2n-1} + f_{2n} = f_{2n-1} - 1$ lorsque n est un entier positif.

Résolution : $P(1)$ est V, parce que $f_0 - f_1 + f_2 = 0 - 1 + 1 = 0$ et $f_1 - 1 = 1 - 1 = 0$. Supposons que $P(n)$ est V. Nous avons

$$\begin{aligned} f_0 - f_1 + f_2 - \cdots - f_{2n-1} + f_{2n} - f_{2n+1} + f_{2n+2} &= f_{2n-1} - 1 - f_{2n+1} + f_{2n+2} \\ &= f_{2n-1} - 1 + f_{2n} \\ &= f_{2n+1} - 1 \end{aligned}$$

Problème 3.3.14

Problème : Démontrez que $f_0 - f_1 + f_2 - \cdots - f_{2n-1} + f_{2n} = f_{2n-1} - 1$ lorsque n est un entier positif.

Résolution : $P(1)$ est V, parce que $f_0 - f_1 + f_2 = 0 - 1 + 1 = 0$ et $f_1 - 1 = 1 - 1 = 0$. Supposons que $P(n)$ est V. Nous avons

$$\begin{aligned}
 f_0 - f_1 + f_2 - \cdots - f_{2n-1} + f_{2n} - f_{2n+1} + f_{2n+2} &= f_{2n-1} - 1 - f_{2n+1} + f_{2n+2} \\
 &= f_{2n-1} - 1 + f_{2n} \\
 &= f_{2n+1} - 1 \\
 &= f_{2(n+1)-1} - 1
 \end{aligned}$$

Problème 3.3.14

Problème : Démontrez que $f_0 - f_1 + f_2 - \cdots - f_{2n-1} + f_{2n} = f_{2n-1} - 1$ lorsque n est un entier positif.

Résolution : $P(1)$ est V, parce que $f_0 - f_1 + f_2 = 0 - 1 + 1 = 0$ et $f_1 - 1 = 1 - 1 = 0$. Supposons que $P(n)$ est V. Nous avons

$$\begin{aligned}
 f_0 - f_1 + f_2 - \cdots - f_{2n-1} + f_{2n} - f_{2n+1} + f_{2n+2} &= f_{2n-1} - 1 - f_{2n+1} + f_{2n+2} \\
 &= f_{2n-1} - 1 + f_{2n} \\
 &= f_{2n+1} - 1 \\
 &= f_{2(n+1)-1} - 1
 \end{aligned}$$

On a donc que $P(n+1)$ est V et que l'énoncé est V par induction pour $n \geq 1$.

Problème 4.1.17

Problème : Combien d'entiers positifs ayant exactement trois chiffres décimaux, c'est-à-dire des entiers positifs compris entre 100 et 999 inclusivement,

- 1 sont divisibles par 7 ?
- 2 sont impairs ?
- 3 ont trois chiffres décimaux identiques ?
- 4 ne sont pas divisibles par 4 ?

Problème 4.1.17

Problème : Combien d'entiers positifs ayant exactement trois chiffres décimaux, c'est-à-dire des entiers positifs compris entre 100 et 999 inclusivement,

- 1 sont divisibles par 7 ? Il y a $\lfloor \frac{999}{7} \rfloor - \lfloor \frac{99}{7} \rfloor = 142 - 14 = 128$ nombres divisibles par 7.
- 2 sont impairs ?
- 3 ont trois chiffres décimaux identiques ?
- 4 ne sont pas divisibles par 4 ?

Problème 4.1.17

Problème : Combien d'entiers positifs ayant exactement trois chiffres décimaux, c'est-à-dire des entiers positifs compris entre 100 et 999 inclusivement,

- ① sont divisibles par 7 ? Il y a $\lfloor \frac{999}{7} \rfloor - \lfloor \frac{99}{7} \rfloor = 142 - 14 = 128$ nombres divisibles par 7.
- ② sont impairs ? il y a $\lfloor \frac{999}{2} \rfloor - \lfloor \frac{99}{2} \rfloor = 499 - 49 = 450$ nombres pairs.
- ③ ont trois chiffres décimaux identiques ?
- ④ ne sont pas divisibles par 4 ?

Problème 4.1.17

Problème : Combien d'entiers positifs ayant exactement trois chiffres décimaux, c'est-à-dire des entiers positifs compris entre 100 et 999 inclusivement,

- ① sont divisibles par 7 ? Il y a $\lfloor \frac{999}{7} \rfloor - \lfloor \frac{99}{7} \rfloor = 142 - 14 = 128$ nombres divisibles par 7.
- ② sont impairs ? il y a $\lfloor \frac{999}{2} \rfloor - \lfloor \frac{99}{2} \rfloor = 499 - 49 = 450$ nombres pairs. Donc $900 - 450 = 450$ nombres impairs.
- ③ ont trois chiffres décimaux identiques ?
- ④ ne sont pas divisibles par 4 ?

Problème 4.1.17

Problème : Combien d'entiers positifs ayant exactement trois chiffres décimaux, c'est-à-dire des entiers positifs compris entre 100 et 999 inclusivement,

- ① sont divisibles par 7 ? Il y a $\lfloor \frac{999}{7} \rfloor - \lfloor \frac{99}{7} \rfloor = 142 - 14 = 128$ nombres divisibles par 7.
- ② sont impairs ? il y a $\lfloor \frac{999}{2} \rfloor - \lfloor \frac{99}{2} \rfloor = 499 - 49 = 450$ nombres pairs. Donc $900 - 450 = 450$ nombres impairs.
- ③ ont trois chiffres décimaux identiques ? Il y a 9 nombres avec les chiffres identiques: 111, 222, 333, ..., 999.
- ④ ne sont pas divisibles par 4 ?

Problème 4.1.17

Problème : Combien d'entiers positifs ayant exactement trois chiffres décimaux, c'est-à-dire des entiers positifs compris entre 100 et 999 inclusivement,

- ① sont divisibles par 7 ? Il y a $\lfloor \frac{999}{7} \rfloor - \lfloor \frac{99}{7} \rfloor = 142 - 14 = 128$ nombres divisibles par 7.
- ② sont impairs ? il y a $\lfloor \frac{999}{2} \rfloor - \lfloor \frac{99}{2} \rfloor = 499 - 49 = 450$ nombres pairs. Donc $900 - 450 = 450$ nombres impairs.
- ③ ont trois chiffres décimaux identiques ? Il y a 9 nombres avec les chiffres identiques: 111, 222, 333, ..., 999.
- ④ ne sont pas divisibles par 4 ? Il y a $\lfloor \frac{999}{4} \rfloor - \lfloor \frac{99}{4} \rfloor = 249 - 24 = 225$ nombres divisibles par 4.

Problème 4.1.17

Problème : Combien d'entiers positifs ayant exactement trois chiffres décimaux, c'est-à-dire des entiers positifs compris entre 100 et 999 inclusivement,

- ① sont divisibles par 7 ? Il y a $\lfloor \frac{999}{7} \rfloor - \lfloor \frac{99}{7} \rfloor = 142 - 14 = 128$ nombres divisibles par 7.
- ② sont impairs ? il y a $\lfloor \frac{999}{2} \rfloor - \lfloor \frac{99}{2} \rfloor = 499 - 49 = 450$ nombres pairs. Donc $900 - 450 = 450$ nombres impairs.
- ③ ont trois chiffres décimaux identiques ? Il y a 9 nombres avec les chiffres identiques: 111, 222, 333, ..., 999.
- ④ ne sont pas divisibles par 4 ? Il y a $\lfloor \frac{999}{4} \rfloor - \lfloor \frac{99}{4} \rfloor = 249 - 24 = 225$ nombres divisibles par 4. Donc $900 - 225 = 675$ nombres non divisibles par 4.

Problème 4.1.17

Problème : Combien d'entiers positifs ayant exactement trois chiffres décimaux, c'est-à-dire des entiers positifs compris entre 100 et 999 inclusivement,

- 1 sont divisibles par 3 et par 4 ?
- 2 sont divisibles par 3 ou par 4 ?
- 3 ne sont divisibles ni par 3 ni par 4 ?
- 4 sont divisibles par 3 mais non par 4 ?

Problème 4.1.17

Problème : Combien d'entiers positifs ayant exactement trois chiffres décimaux, c'est-à-dire des entiers positifs compris entre 100 et 999 inclusivement,

- ① sont divisibles par 3 et par 4 ? $\lfloor \frac{999}{12} \rfloor - \lfloor \frac{99}{12} \rfloor = 83 - 8 = 75$ divisibles par 3 et par 4.
- ② sont divisibles par 3 ou par 4 ?
- ③ ne sont divisibles ni par 3 ni par 4 ?
- ④ sont divisibles par 3 mais non par 4 ?

Problème 4.1.17

Problème : Combien d'entiers positifs ayant exactement trois chiffres décimaux, c'est-à-dire des entiers positifs compris entre 100 et 999 inclusivement,

- ① sont divisibles par 3 et par 4 ? $\lfloor \frac{999}{12} \rfloor - \lfloor \frac{99}{12} \rfloor = 83 - 8 = 75$ divisibles par 3 et par 4.
- ② sont divisibles par 3 ou par 4 ? $\lfloor \frac{999}{3} \rfloor - \lfloor \frac{99}{3} \rfloor = 333 - 33 = 300$ divisibles par 3.
- ③ ne sont divisibles ni par 3 ni par 4 ?
- ④ sont divisibles par 3 mais non par 4 ?

Problème 4.1.17

Problème : Combien d'entiers positifs ayant exactement trois chiffres décimaux, c'est-à-dire des entiers positifs compris entre 100 et 999 inclusivement,

- ① sont divisibles par 3 et par 4 ? $\lfloor \frac{999}{12} \rfloor - \lfloor \frac{99}{12} \rfloor = 83 - 8 = 75$ divisibles par 3 et par 4.
- ② sont divisibles par 3 ou par 4 ? $\lfloor \frac{999}{3} \rfloor - \lfloor \frac{99}{3} \rfloor = 333 - 33 = 300$ divisibles par 3. 225 divisibles par 4.
- ③ ne sont divisibles ni par 3 ni par 4 ?
- ④ sont divisibles par 3 mais non par 4 ?

Problème 4.1.17

Problème : Combien d'entiers positifs ayant exactement trois chiffres décimaux, c'est-à-dire des entiers positifs compris entre 100 et 999 inclusivement,

- ① sont divisibles par 3 et par 4 ? $\lfloor \frac{999}{12} \rfloor - \lfloor \frac{99}{12} \rfloor = 83 - 8 = 75$ divisibles par 3 et par 4.
- ② sont divisibles par 3 ou par 4 ? $\lfloor \frac{999}{3} \rfloor - \lfloor \frac{99}{3} \rfloor = 333 - 33 = 300$ divisibles par 3. 225 divisibles par 4. 75 divisibles par 12.
- ③ ne sont divisibles ni par 3 ni par 4 ?
- ④ sont divisibles par 3 mais non par 4 ?

Problème 4.1.17

Problème : Combien d'entiers positifs ayant exactement trois chiffres décimaux, c'est-à-dire des entiers positifs compris entre 100 et 999 inclusivement,

- ① sont divisibles par 3 et par 4 ? $\lfloor \frac{999}{12} \rfloor - \lfloor \frac{99}{12} \rfloor = 83 - 8 = 75$ divisibles par 3 et par 4.
- ② sont divisibles par 3 ou par 4 ? $\lfloor \frac{999}{3} \rfloor - \lfloor \frac{99}{3} \rfloor = 333 - 33 = 300$ divisibles par 3. 225 divisibles par 4. 75 divisibles par 12. Inclusion-exclusion donne $300 + 225 - 75 = 450$ divisibles par 3 ou par 4.
- ③ ne sont divisibles ni par 3 ni par 4 ?
- ④ sont divisibles par 3 mais non par 4 ?

Problème 4.1.17

Problème : Combien d'entiers positifs ayant exactement trois chiffres décimaux, c'est-à-dire des entiers positifs compris entre 100 et 999 inclusivement,

- ① sont divisibles par 3 et par 4 ? $\lfloor \frac{999}{12} \rfloor - \lfloor \frac{99}{12} \rfloor = 83 - 8 = 75$ divisibles par 3 et par 4.
- ② sont divisibles par 3 ou par 4 ? $\lfloor \frac{999}{3} \rfloor - \lfloor \frac{99}{3} \rfloor = 333 - 33 = 300$ divisibles par 3. 225 divisibles par 4. 75 divisibles par 12. Inclusion-exclusion donne $300 + 225 - 75 = 450$ divisibles par 3 ou par 4.
- ③ ne sont divisibles ni par 3 ni par 4 ? 450 divisibles par 3 ou par 4.
- ④ sont divisibles par 3 mais non par 4 ?

Problème 4.1.17

Problème : Combien d'entiers positifs ayant exactement trois chiffres décimaux, c'est-à-dire des entiers positifs compris entre 100 et 999 inclusivement,

- ① sont divisibles par 3 et par 4 ? $\lfloor \frac{999}{12} \rfloor - \lfloor \frac{99}{12} \rfloor = 83 - 8 = 75$ divisibles par 3 et par 4.
- ② sont divisibles par 3 ou par 4 ? $\lfloor \frac{999}{3} \rfloor - \lfloor \frac{99}{3} \rfloor = 333 - 33 = 300$ divisibles par 3. 225 divisibles par 4. 75 divisibles par 12. Inclusion-exclusion donne $300 + 225 - 75 = 450$ divisibles par 3 ou par 4.
- ③ ne sont divisibles ni par 3 ni par 4 ? 450 divisibles par 3 ou par 4. Donc $900 - 450 = 450$ non divisibles ni par 3 ni par 4.
- ④ sont divisibles par 3 mais non par 4 ?

Problème 4.1.17

Problème : Combien d'entiers positifs ayant exactement trois chiffres décimaux, c'est-à-dire des entiers positifs compris entre 100 et 999 inclusivement,

- ① sont divisibles par 3 et par 4 ? $\lfloor \frac{999}{12} \rfloor - \lfloor \frac{99}{12} \rfloor = 83 - 8 = 75$ divisibles par 3 et par 4.
- ② sont divisibles par 3 ou par 4 ? $\lfloor \frac{999}{3} \rfloor - \lfloor \frac{99}{3} \rfloor = 333 - 33 = 300$ divisibles par 3. 225 divisibles par 4. 75 divisibles par 12. Inclusion-exclusion donne $300 + 225 - 75 = 450$ divisibles par 3 ou par 4.
- ③ ne sont divisibles ni par 3 ni par 4 ? 450 divisibles par 3 ou par 4. Donc $900 - 450 = 450$ non divisibles ni par 3 ni par 4.
- ④ sont divisibles par 3 mais non par 4 ? 300 divisibles par 3

Problème 4.1.17

Problème : Combien d'entiers positifs ayant exactement trois chiffres décimaux, c'est-à-dire des entiers positifs compris entre 100 et 999 inclusivement,

- ① sont divisibles par 3 et par 4 ? $\lfloor \frac{999}{12} \rfloor - \lfloor \frac{99}{12} \rfloor = 83 - 8 = 75$ divisibles par 3 et par 4.
- ② sont divisibles par 3 ou par 4 ? $\lfloor \frac{999}{3} \rfloor - \lfloor \frac{99}{3} \rfloor = 333 - 33 = 300$ divisibles par 3. 225 divisibles par 4. 75 divisibles par 12.
Inclusion-exclusion donne $300 + 225 - 75 = 450$ divisibles par 3 ou par 4.
- ③ ne sont divisibles ni par 3 ni par 4 ? 450 divisibles par 3 ou par 4.
Donc $900 - 450 = 450$ non divisibles ni par 3 ni par 4.
- ④ sont divisibles par 3 mais non par 4 ? 300 divisibles par 3 et 75 divisibles par 3 et par 4.

Problème 4.1.17

Problème : Combien d'entiers positifs ayant exactement trois chiffres décimaux, c'est-à-dire des entiers positifs compris entre 100 et 999 inclusivement,

- ① sont divisibles par 3 et par 4 ? $\lfloor \frac{999}{12} \rfloor - \lfloor \frac{99}{12} \rfloor = 83 - 8 = 75$ divisibles par 3 et par 4.
- ② sont divisibles par 3 ou par 4 ? $\lfloor \frac{999}{3} \rfloor - \lfloor \frac{99}{3} \rfloor = 333 - 33 = 300$ divisibles par 3. 225 divisibles par 4. 75 divisibles par 12. Inclusion-exclusion donne $300 + 225 - 75 = 450$ divisibles par 3 ou par 4.
- ③ ne sont divisibles ni par 3 ni par 4 ? 450 divisibles par 3 ou par 4. Donc $900 - 450 = 450$ non divisibles ni par 3 ni par 4.
- ④ sont divisibles par 3 mais non par 4 ? 300 divisibles par 3 et 75 divisibles par 3 et par 4. Donc $300 - 75 = 225$ sont divisibles par 3 mais non par 4.

Problème 4.1.38

Problème : Combien de chaînes binaires de longueur 10 contiennent soit cinq 0 consécutifs, soit cinq 1 consécutifs ?

Résolution :

Problème 4.1.38

Problème : Combien de chaînes binaires de longueur 10 contiennent soit cinq 0 consécutifs, soit cinq 1 consécutifs ?

Résolution : On compte d'abord les chaînes avec cinq ou plus 0 consécutifs.

Problème 4.1.38

Problème : Combien de chaînes binaires de longueur 10 contiennent soit cinq 0 consécutifs, soit cinq 1 consécutifs ?

Résolution : On compte d'abord les chaînes avec cinq ou plus 0 consécutifs. On a 2^5 chaînes du type $00000XXXXX$,

Problème 4.1.38

Problème : Combien de chaînes binaires de longueur 10 contiennent soit cinq 0 consécutifs, soit cinq 1 consécutifs ?

Résolution : On compte d'abord les chaînes avec cinq ou plus 0 consécutifs. On a 2^5 chaînes du type $00000XXXXX$, 2^4 chaînes du type $10000XXXX$,

Problème 4.1.38

Problème : Combien de chaînes binaires de longueur 10 contiennent soit cinq 0 consécutifs, soit cinq 1 consécutifs ?

Résolution : On compte d'abord les chaînes avec cinq ou plus 0 consécutifs. On a 2^5 chaînes du type $00000XXXXX$, 2^4 chaînes du type $100000XXXX$, 2^4 chaînes du type $X100000XXX$,

Problème 4.1.38

Problème : Combien de chaînes binaires de longueur 10 contiennent soit cinq 0 consécutifs, soit cinq 1 consécutifs ?

Résolution : On compte d'abord les chaînes avec cinq ou plus 0 consécutifs. On a 2^5 chaînes du type $00000XXXXX$, 2^4 chaînes du type $100000XXXX$, 2^4 chaînes du type $X100000XXX$, 2^4 chaînes du type $XX100000XX$,

Problème 4.1.38

Problème : Combien de chaînes binaires de longueur 10 contiennent soit cinq 0 consécutifs, soit cinq 1 consécutifs ?

Résolution : On compte d'abord les chaînes avec cinq ou plus 0 consécutifs. On a 2^5 chaînes du type $00000XXXXX$, 2^4 chaînes du type $100000XXXX$, 2^4 chaînes du type $X100000XXX$, 2^4 chaînes du type $XX100000XX$, 2^4 chaînes du type $XXX100000X$,

Problème 4.1.38

Problème : Combien de chaînes binaires de longueur 10 contiennent soit cinq 0 consécutifs, soit cinq 1 consécutifs ?

Résolution : On compte d'abord les chaînes avec cinq ou plus 0 consécutifs. On a 2^5 chaînes du type $00000XXXXX$, 2^4 chaînes du type $100000XXXX$, 2^4 chaînes du type $X100000XXX$, 2^4 chaînes du type $XX100000XX$, 2^4 chaînes du type $XXX100000X$, et 2^4 chaînes du type $XXXX100000$.

Problème 4.1.38

Problème : Combien de chaînes binaires de longueur 10 contiennent soit cinq 0 consécutifs, soit cinq 1 consécutifs ?

Résolution : On compte d'abord les chaînes avec cinq ou plus 0 consécutifs. On a 2^5 chaînes du type $00000XXXXX$, 2^4 chaînes du type $100000XXXX$, 2^4 chaînes du type $X100000XXX$, 2^4 chaînes du type $XX100000XX$, 2^4 chaînes du type $XXX100000X$, et 2^4 chaînes du type $XXXX100000$. Cela donne

$$2^5 + 2^4 \cdot 5 = 112$$

chaînes avec cinq ou plus 0 consécutifs.

Problème 4.1.38

Problème : Combien de chaînes binaires de longueur 10 contiennent soit cinq 0 consécutifs, soit cinq 1 consécutifs ?

Résolution : On compte d'abord les chaînes avec cinq ou plus 0 consécutifs. On a 2^5 chaînes du type $00000XXXXX$, 2^4 chaînes du type $100000XXXX$, 2^4 chaînes du type $X100000XXX$, 2^4 chaînes du type $XX100000XX$, 2^4 chaînes du type $XXX100000X$, et 2^4 chaînes du type $XXXX100000$. Cela donne

$$2^5 + 2^4 \cdot 5 = 112$$

chaînes avec cinq ou plus 0 consécutifs. Par symétrie, il y a aussi 112 chaînes avec cinq ou plus 1 consécutifs.

Problème 4.1.38

Problème : Combien de chaînes binaires de longueur 10 contiennent soit cinq 0 consécutifs, soit cinq 1 consécutifs ?

Résolution : On compte d'abord les chaînes avec cinq ou plus 0 consécutifs. On a 2^5 chaînes du type $00000XXXX$, 2^4 chaînes du type $100000XXXX$, 2^4 chaînes du type $X100000XXX$, 2^4 chaînes du type $XX100000XX$, 2^4 chaînes du type $XXX100000X$, et 2^4 chaînes du type $XXXX100000$. Cela donne

$$2^5 + 2^4 \cdot 5 = 112$$

chaînes avec cinq ou plus 0 consécutifs. Par symétrie, il y a aussi 112 chaînes avec cinq ou plus 1 consécutifs. Finalement, il y a deux chaînes avec exactement cinq 0 et cinq 1 consécutifs (0000011111 et 1111100000).

Problème 4.1.38

Problème : Combien de chaînes binaires de longueur 10 contiennent soit cinq 0 consécutifs, soit cinq 1 consécutifs ?

Résolution : On compte d'abord les chaînes avec cinq ou plus 0 consécutifs. On a 2^5 chaînes du type $00000XXXX$, 2^4 chaînes du type $100000XXXX$, 2^4 chaînes du type $X100000XXX$, 2^4 chaînes du type $XX100000XX$, 2^4 chaînes du type $XXX100000X$, et 2^4 chaînes du type $XXXX100000$. Cela donne

$$2^5 + 2^4 \cdot 5 = 112$$

chaînes avec cinq ou plus 0 consécutifs. Par symétrie, il y a aussi 112 chaînes avec cinq ou plus 1 consécutifs. Finalement, il y a deux chaînes avec exactement cinq 0 et cinq 1 consécutifs (0000011111 et 1111100000). Par le principe de l'inclusion-exclusion, on a donc

$$112 + 112 - 2 = 222$$

chaînes binaires avec les conditions demandées.

Problème 4.1.51

Problème : Combien de diagonales un polygone convexe à n côtés a-t-il ? (Un polygone est convexe si chaque segment de droite reliant deux points de l'intérieur ou de la frontière du polygone est situé à l'intérieur de cet ensemble.)

Résolution :

Problème 4.1.51

Problème : Combien de diagonales un polygone convexe à n côtés a-t-il ? (Un polygone est convexe si chaque segment de droite reliant deux points de l'intérieur ou de la frontière du polygone est situé à l'intérieur de cet ensemble.)

Résolution : Chaque diagonale connecte deux sommets du polygone qui ne sont pas déjà connectés par un côté.

Problème 4.1.51

Problème : Combien de diagonales un polygone convexe à n côtés a-t-il ? (Un polygone est convexe si chaque segment de droite reliant deux points de l'intérieur ou de la frontière du polygone est situé à l'intérieur de cet ensemble.)

Résolution : Chaque diagonale connecte deux sommets du polygone qui ne sont pas déjà connectés par un côté. Il y a $n - 3$ diagonales qui sortent de chaque sommet.

Problème 4.1.51

Problème : Combien de diagonales un polygone convexe à n côtés a-t-il ? (Un polygone est convexe si chaque segment de droite reliant deux points de l'intérieur ou de la frontière du polygone est situé à l'intérieur de cet ensemble.)

Résolution : Chaque diagonale connecte deux sommets du polygone qui ne sont pas déjà connectés par un côté. Il y a $n - 3$ diagonales qui sortent de chaque sommet. En multipliant par n , on a compté chaque diagonale deux fois.

Problème 4.1.51

Problème : Combien de diagonales un polygone convexe à n côtés a-t-il ? (Un polygone est convexe si chaque segment de droite reliant deux points de l'intérieur ou de la frontière du polygone est situé à l'intérieur de cet ensemble.)

Résolution : Chaque diagonale connecte deux sommets du polygone qui ne sont pas déjà connectés par un côté. Il y a $n - 3$ diagonales qui sortent de chaque sommet. En multipliant par n , on a compté chaque diagonale deux fois. On trouve donc

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

diagonales.

Problème 4.2.13

Problème : Une entreprise emmagasine des produits dans un entrepôt. Les boîtes d'entreposage de cet entrepôt sont identifiées en fonction des allées et des étagères. L'entrepôt comprend 50 allées, 85 emplacements horizontaux dans chaque allée et 5 étagères. Quel est le plus petit nombre de produits que peut entreposer l'entreprise pour qu'au moins deux produits soient contenus dans la même boîte ?

Résolution :

Problème 4.2.13

Problème : Une entreprise emmagasine des produits dans un entrepôt. Les boîtes d'entreposage de cet entrepôt sont identifiées en fonction des allées et des étagères. L'entrepôt comprend 50 allées, 85 emplacements horizontaux dans chaque allée et 5 étagères. Quel est le plus petit nombre de produits que peut entreposer l'entreprise pour qu'au moins deux produits soient contenus dans la même boîte ?

Résolution : Par le principe de nids de pigeon, le nombre minimal est

$$50 \cdot 85 \cdot 5 + 1 = 21.251.$$

Problème 4.2.27

Problème : Un réseau est constitué de 6 ordinateurs. Chaque ordinateur est directement relié à 0 ordinateur ou à plusieurs autres ordinateurs. Démontrez qu'il y a au moins 2 ordinateurs dans le réseau qui sont directement reliés au même nombre d'ordinateurs.

Résolution :

Problème 4.2.27

Problème : Un réseau est constitué de 6 ordinateurs. Chaque ordinateur est directement relié à 0 ordinateur ou à plusieurs autres ordinateurs. Démontrez qu'il y a au moins 2 ordinateurs dans le réseau qui sont directement reliés au même nombre d'ordinateurs.

Résolution : Soit a_i le nombre d'ordinateurs reliés à l'ordinateur i .

Problème 4.2.27

Problème : Un réseau est constitué de 6 ordinateurs. Chaque ordinateur est directement relié à 0 ordinateur ou à plusieurs autres ordinateurs. Démontrez qu'il y a au moins 2 ordinateurs dans le réseau qui sont directement reliés au même nombre d'ordinateurs.

Résolution : Soit a_i le nombre d'ordinateurs reliés à l'ordinateur i . On a que $\forall i a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Problème 4.2.27

Problème : Un réseau est constitué de 6 ordinateurs. Chaque ordinateur est directement relié à 0 ordinateur ou à plusieurs autres ordinateurs. Démontrez qu'il y a au moins 2 ordinateurs dans le réseau qui sont directement reliés au même nombre d'ordinateurs.

Résolution : Soit a_i le nombre d'ordinateurs reliés à l'ordinateur i . On a que $\forall i, a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Supposons que tous les a_i sont différents.

Problème 4.2.27

Problème : Un réseau est constitué de 6 ordinateurs. Chaque ordinateur est directement relié à 0 ordinateur ou à plusieurs autres ordinateurs. Démontrez qu'il y a au moins 2 ordinateurs dans le réseau qui sont directement reliés au même nombre d'ordinateurs.

Résolution : Soit a_i le nombre d'ordinateurs reliés à l'ordinateur i . On a que $\forall i a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Supposons que tous les a_i sont différents. Il y a un i tel que $a_i = 5$.

Problème 4.2.27

Problème : Un réseau est constitué de 6 ordinateurs. Chaque ordinateur est directement relié à 0 ordinateur ou à plusieurs autres ordinateurs. Démontrez qu'il y a au moins 2 ordinateurs dans le réseau qui sont directement reliés au même nombre d'ordinateurs.

Résolution : Soit a_i le nombre d'ordinateurs reliés à l'ordinateur i . On a que $\forall i a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Supposons que tous les a_i sont différents. Il y a un i tel que $a_i = 5$. Cela veut dire qu'il y a un ordinateur qui est connecté à tous les autres.

Problème 4.2.27

Problème : Un réseau est constitué de 6 ordinateurs. Chaque ordinateur est directement relié à 0 ordinateur ou à plusieurs autres ordinateurs. Démontrez qu'il y a au moins 2 ordinateurs dans le réseau qui sont directement reliés au même nombre d'ordinateurs.

Résolution : Soit a_i le nombre d'ordinateurs reliés à l'ordinateur i . On a que $\forall i a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Supposons que tous les a_i sont différents. Il y a un i tel que $a_i = 5$. Cela veut dire qu'il y a un ordinateur qui est connecté à tous les autres. Mais dans ce cas, tous les a_i sont positifs.

Problème 4.2.27

Problème : Un réseau est constitué de 6 ordinateurs. Chaque ordinateur est directement relié à 0 ordinateur ou à plusieurs autres ordinateurs. Démontrez qu'il y a au moins 2 ordinateurs dans le réseau qui sont directement reliés au même nombre d'ordinateurs.

Résolution : Soit a_i le nombre d'ordinateurs reliés à l'ordinateur i . On a que $\forall i a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Supposons que tous les a_i sont différents. Il y a un i tel que $a_i = 5$. Cela veut dire qu'il y a un ordinateur qui est connecté à tous les autres. Mais dans ce cas, tous les a_j sont positifs. Donc, $a_j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Problème 4.2.27

Problème : Un réseau est constitué de 6 ordinateurs. Chaque ordinateur est directement relié à 0 ordinateur ou à plusieurs autres ordinateurs. Démontrez qu'il y a au moins 2 ordinateurs dans le réseau qui sont directement reliés au même nombre d'ordinateurs.

Résolution : Soit a_i le nombre d'ordinateurs reliés à l'ordinateur i . On a que $\forall i, a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Supposons que tous les a_i sont différents. Il y a un i tel que $a_i = 5$. Cela veut dire qu'il y a un ordinateur qui est connecté à tous les autres. Mais dans ce cas, tous les a_j sont positifs. Donc, $a_j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Comme il y a 6 ordinateurs, par le principe de nids de pigeon, il doit avoir au moins deux ordinateurs qui sont reliés au même nombre d'ordinateurs.

Problème 4.2.32

Problème : Supposez qu'il y a au moins 9 étudiants inscrits à un cours de mathématiques discrètes dans une petite université.

- 1 Démontrez qu'il doit y avoir au moins 5 étudiants ou au moins 5 étudiantes inscrits à ce cours.
- 2 Démontrez qu'il doit y avoir au moins 3 étudiants ou au moins 7 étudiantes inscrits à ce cours.

(On suppose ici qu'il n'y a pas que deux genres.)

Résolution :

Problème 4.2.32

Problème : Supposez qu'il y a au moins 9 étudiants inscrits à un cours de mathématiques discrètes dans une petite université.

- 1 Démontrez qu'il doit y avoir au moins 5 étudiants ou au moins 5 étudiantes inscrits à ce cours.
- 2 Démontrez qu'il doit y avoir au moins 3 étudiants ou au moins 7 étudiantes inscrits à ce cours.

(On suppose ici qu'il n'y a pas que deux genres.)

Résolution : (1) Supposons que non.

Problème 4.2.32

Problème : Supposez qu'il y a au moins 9 étudiants inscrits à un cours de mathématiques discrètes dans une petite université.

- 1 Démontrez qu'il doit y avoir au moins 5 étudiants ou au moins 5 étudiantes inscrits à ce cours.
- 2 Démontrez qu'il doit y avoir au moins 3 étudiants ou au moins 7 étudiantes inscrits à ce cours.

(On suppose ici qu'il n'y a pas que deux genres.)

Résolution : (1) Supposons que non. Il y a au plus 4 étudiants et au plus 4 étudiantes.

Problème 4.2.32

Problème : Supposez qu'il y a au moins 9 étudiants inscrits à un cours de mathématiques discrètes dans une petite université.

- 1 Démontrez qu'il doit y avoir au moins 5 étudiants ou au moins 5 étudiantes inscrits à ce cours.
- 2 Démontrez qu'il doit y avoir au moins 3 étudiants ou au moins 7 étudiantes inscrits à ce cours.

(On suppose ici qu'il n'y a pas que deux genres.)

Résolution : (1) Supposons que non. Il y a au plus 4 étudiants et au plus 4 étudiantes. On obtient donc au plus $4 + 4 = 8$ étudiants, contradiction.

Problème 4.2.32

Problème : Supposez qu'il y a au moins 9 étudiants inscrits à un cours de mathématiques discrètes dans une petite université.

- 1 Démontrez qu'il doit y avoir au moins 5 étudiants ou au moins 5 étudiantes inscrits à ce cours.
- 2 Démontrez qu'il doit y avoir au moins 3 étudiants ou au moins 7 étudiantes inscrits à ce cours.

(On suppose ici qu'il n'y a pas que deux genres.)

Résolution : (1) Supposons que non. Il y a au plus 4 étudiants et au plus 4 étudiantes. On obtient donc au plus $4 + 4 = 8$ étudiants, contradiction.

(2) Supposons que non.

Problème 4.2.32

Problème : Supposez qu'il y a au moins 9 étudiants inscrits à un cours de mathématiques discrètes dans une petite université.

- 1 Démontrez qu'il doit y avoir au moins 5 étudiants ou au moins 5 étudiantes inscrits à ce cours.
- 2 Démontrez qu'il doit y avoir au moins 3 étudiants ou au moins 7 étudiantes inscrits à ce cours.

(On suppose ici qu'il n'y a pas que deux genres.)

Résolution : (1) Supposons que non. Il y a au plus 4 étudiants et au plus 4 étudiantes. On obtient donc au plus $4 + 4 = 8$ étudiants, contradiction.
(2) Supposons que non. Il y a au plus 2 étudiants et au plus 6 étudiantes.

Problème 4.2.32

Problème : Supposez qu'il y a au moins 9 étudiants inscrits à un cours de mathématiques discrètes dans une petite université.

- 1 Démontrez qu'il doit y avoir au moins 5 étudiants ou au moins 5 étudiantes inscrits à ce cours.
- 2 Démontrez qu'il doit y avoir au moins 3 étudiants ou au moins 7 étudiantes inscrits à ce cours.

(On suppose ici qu'il n'y a pas que deux genres.)

Résolution : (1) Supposons que non. Il y a au plus 4 étudiants et au plus 4 étudiantes. On obtient donc au plus $4 + 4 = 8$ étudiants, contradiction.
(2) Supposons que non. Il y a au plus 2 étudiants et au plus 6 étudiantes. On obtient donc au plus $2 + 6 = 8$ étudiants, contradiction.

Problème 4.3.24

Problème : Combien des chaînes de 6 lettres de l'alphabet anglais contiennent

- la lettre a ?
- les lettres a et b ?
- les lettres a et b de façon consécutive lorsque a précède b et que toutes les lettres sont distinctes ?
- les lettres a et b , alors que a se trouve quelque part à gauche de b dans la chaîne et que toutes les lettres sont distinctes ?

Problème 4.3.24

Problème : Combien des chaînes de 6 lettres de l'alphabet anglais contiennent

- la lettre a ? $26^6 - 25^6$.
- les lettres a et b ?
- les lettres a et b de façon consécutive lorsque a précède b et que toutes les lettres sont distinctes ?
- les lettres a et b , alors que a se trouve quelque part à gauche de b dans la chaîne et que toutes les lettres sont distinctes ?

Problème 4.3.24

Problème : Combien des chaînes de 6 lettres de l'alphabet anglais contiennent

- la lettre a ? $26^6 - 25^6$.
- les lettres a et b ? Inclusion-exclusion : $26^6 - 2 \cdot 25^6 + 24^6$.
- les lettres a et b de façon consécutive lorsque a précède b et que toutes les lettres sont distinctes ?
- les lettres a et b , alors que a se trouve quelque part à gauche de b dans la chaîne et que toutes les lettres sont distinctes ?

Problème 4.3.24

Problème : Combien des chaînes de 6 lettres de l'alphabet anglais contiennent

- la lettre a ? $26^6 - 25^6$.
- les lettres a et b ? Inclusion-exclusion : $26^6 - 2 \cdot 25^6 + 24^6$.
- les lettres a et b de façon consécutive lorsque a précède b et que toutes les lettres sont distinctes ? Choisir la place pour ab de 5 manières.
- les lettres a et b , alors que a se trouve quelque part à gauche de b dans la chaîne et que toutes les lettres sont distinctes ?

Problème 4.3.24

Problème : Combien des chaînes de 6 lettres de l'alphabet anglais contiennent

- la lettre a ? $26^6 - 25^6$.
- les lettres a et b ? Inclusion-exclusion : $26^6 - 2 \cdot 25^6 + 24^6$.
- les lettres a et b de façon consécutive lorsque a précède b et que toutes les lettres sont distinctes ? Choisir la place pour ab de 5 manières. Pour les autres places, il y a $P(24, 4)$ possibilités.
- les lettres a et b , alors que a se trouve quelque part à gauche de b dans la chaîne et que toutes les lettres sont distinctes ?

Problème 4.3.24

Problème : Combien des chaînes de 6 lettres de l'alphabet anglais contiennent

- la lettre a ? $26^6 - 25^6$.
- les lettres a et b ? Inclusion-exclusion : $26^6 - 2 \cdot 25^6 + 24^6$.
- les lettres a et b de façon consécutive lorsque a précède b et que toutes les lettres sont distinctes ? Choisir la place pour ab de 5 manières. Pour les autres places, il y a $P(24, 4)$ possibilités. Le total est donc $5P(24, 4)$.
- les lettres a et b , alors que a se trouve quelque part à gauche de b dans la chaîne et que toutes les lettres sont distinctes ?

Problème 4.3.24

Problème : Combien des chaînes de 6 lettres de l'alphabet anglais contiennent

- la lettre a ? $26^6 - 25^6$.
- les lettres a et b ? Inclusion-exclusion : $26^6 - 2 \cdot 25^6 + 24^6$.
- les lettres a et b de façon consécutive lorsque a précède b et que toutes les lettres sont distinctes ? Choisir la place pour ab de 5 manières. Pour les autres places, il y a $P(24, 4)$ possibilités. Le total est donc $5P(24, 4)$.
- les lettres a et b , alors que a se trouve quelque part à gauche de b dans la chaîne et que toutes les lettres sont distinctes ? Choisir les places pour a et b de $C(6, 2)$ manières.

Problème 4.3.24

Problème : Combien des chaînes de 6 lettres de l'alphabet anglais contiennent

- la lettre a ? $26^6 - 25^6$.
- les lettres a et b ? Inclusion-exclusion : $26^6 - 2 \cdot 25^6 + 24^6$.
- les lettres a et b de façon consécutive lorsque a précède b et que toutes les lettres sont distinctes ? Choisir la place pour ab de 5 manières. Pour les autres places, il y a $P(24, 4)$ possibilités. Le total est donc $5P(24, 4)$.
- les lettres a et b , alors que a se trouve quelque part à gauche de b dans la chaîne et que toutes les lettres sont distinctes ? Choisir les places pour a et b de $C(6, 2)$ manières. Choisir les autres lettres de $P(24, 4)$ manières.

Problème 4.3.24

Problème : Combien des chaînes de 6 lettres de l'alphabet anglais contiennent

- la lettre a ? $26^6 - 25^6$.
- les lettres a et b ? Inclusion-exclusion : $26^6 - 2 \cdot 25^6 + 24^6$.
- les lettres a et b de façon consécutive lorsque a précède b et que toutes les lettres sont distinctes ? Choisir la place pour ab de 5 manières. Pour les autres places, il y a $P(24, 4)$ possibilités. Le total est donc $5P(24, 4)$.
- les lettres a et b , alors que a se trouve quelque part à gauche de b dans la chaîne et que toutes les lettres sont distinctes ? Choisir les places pour a et b de $C(6, 2)$ manières. Choisir les autres lettres de $P(24, 4)$ manières. Le total est donc $C(6, 2)P(24, 4)$.

Problème 4.3.29

Problème : Combien des chaînes binaires de longueur 10 contiennent au moins trois 1 et au moins trois 0 ?

Résolution :

Problème 4.3.29

Problème : Combien des chaînes binaires de longueur 10 contiennent au moins trois 1 et au moins trois 0 ?

Résolution : Il faut considérer **trois** 1 et **sept** 0, **quatre** 1 et **six** 0, etc jusqu'à **sept** 1 et **trois** 0.

Problème 4.3.29

Problème : Combien des chaînes binaires de longueur 10 contiennent au moins trois 1 et au moins trois 0 ?

Résolution : Il faut considérer **trois** 1 et **sept** 0, **quatre** 1 et **six** 0, etc jusqu'à **sept** 1 et **trois** 0. Cela donne

$$C(10, 3) + C(10, 4) + C(10, 5) + C(10, 6) + C(10, 7)$$

Problème 4.3.29

Problème : Combien des chaînes binaires de longueur 10 contiennent au moins trois 1 et au moins trois 0 ?

Résolution : Il faut considérer **trois** 1 et **sept** 0, **quatre** 1 et **six** 0, etc jusqu'à **sept** 1 et **trois** 0. Cela donne

$$\begin{aligned} & C(10, 3) + C(10, 4) + C(10, 5) + C(10, 6) + C(10, 7) \\ &= 120 + 210 + 252 + 210 + 120 \end{aligned}$$

Problème 4.3.29

Problème : Combien des chaînes binaires de longueur 10 contiennent au moins trois 1 et au moins trois 0 ?

Résolution : Il faut considérer **trois** 1 et **sept** 0, **quatre** 1 et **six** 0, etc jusqu'à **sept** 1 et **trois** 0. Cela donne

$$\begin{aligned} & C(10, 3) + C(10, 4) + C(10, 5) + C(10, 6) + C(10, 7) \\ &= 120 + 210 + 252 + 210 + 120 \\ &= \mathbf{912}. \end{aligned}$$

Problème 4.3.39

Problème : Quel est le coefficient de x^9 dans $(2 - x)^{19}$?

Résolution :

Problème 4.3.39

Problème : Quel est le coefficient de x^9 dans $(2 - x)^{19}$?

Résolution : Rappelons que $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C(n, k)x^k y^{n-k}$.

Problème 4.3.39

Problème : Quel est le coefficient de x^9 dans $(2 - x)^{19}$?

Résolution : Rappelons que $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C(n, k)x^k y^{n-k}$. On a donc

$$C(19, 9)(-1)^9 2^{10}.$$

Problème 4.3.50

Problème : Démontrez que si n est un entier positif, alors

$$C(2n, 2) = 2C(n, 2) + n^2.$$

- (a) en utilisant un argument combinatoire.
- (b) à l'aide de manipulations algébriques.

Résolution :

Problème 4.3.50

Problème : Démontrez que si n est un entier positif, alors

$$C(2n, 2) = 2C(n, 2) + n^2.$$

(a) en utilisant un argument combinatoire.

(b) à l'aide de manipulations algébriques.

Résolution : (a) Soient A et B deux ensembles disjoints de cardinalité n .

Problème 4.3.50

Problème : Démontrez que si n est un entier positif, alors

$$C(2n, 2) = 2C(n, 2) + n^2.$$

(a) en utilisant un argument combinatoire.

(b) à l'aide de manipulations algébriques.

Résolution : (a) Soient A et B deux ensembles disjoints de cardinalité n .

On va choisir deux éléments de $A \cup B$.

Problème 4.3.50

Problème : Démontrez que si n est un entier positif, alors

$$C(2n, 2) = 2C(n, 2) + n^2.$$

- (a) en utilisant un argument combinatoire.
- (b) à l'aide de manipulations algébriques.

Résolution : (a) Soient A et B deux ensembles disjoints de cardinalité n . On va choisir deux éléments de $A \cup B$. On peut le faire directement de $C(2n, 2)$ manières, car $|A \cup B| = 2n$.

Problème 4.3.50

Problème : Démontrez que si n est un entier positif, alors

$$C(2n, 2) = 2C(n, 2) + n^2.$$

- (a) en utilisant un argument combinatoire.
- (b) à l'aide de manipulations algébriques.

Résolution : (a) Soient A et B deux ensembles disjoints de cardinalité n . On va choisir deux éléments de $A \cup B$. On peut le faire directement de $C(2n, 2)$ manières, car $|A \cup B| = 2n$. On peut aussi penser qu'on va choisir, soit deux éléments de A de $C(n, 2)$ manières, soit deux éléments de B de $C(n, 2)$ manières, ou un élément de A et un élément de B de $n \cdot n$ manières.

Problème 4.3.50

Problème : Démontrez que si n est un entier positif, alors

$$C(2n, 2) = 2C(n, 2) + n^2.$$

- (a) en utilisant un argument combinatoire.
- (b) à l'aide de manipulations algébriques.

Résolution : (a) Soient A et B deux ensembles disjoints de cardinalité n . On va choisir deux éléments de $A \cup B$. On peut le faire directement de $C(2n, 2)$ manières, car $|A \cup B| = 2n$. On peut aussi penser qu'on va choisir, soit deux éléments de A de $C(n, 2)$ manières, soit deux éléments de B de $C(n, 2)$ manières, ou un élément de A et un élément de B de $n \cdot n$ manières. En comparant les deux façons de compter on obtient le résultat.

Problème 4.3.50

Problème : Démontrez que si n est un entier positif, alors

$$C(2n, 2) = 2C(n, 2) + n^2.$$

- (a) en utilisant un argument combinatoire.
 (b) à l'aide de manipulations algébriques.

Résolution : (a) Soient A et B deux ensembles disjoints de cardinalité n . On va choisir deux éléments de $A \cup B$. On peut le faire directement de $C(2n, 2)$ manières, car $|A \cup B| = 2n$. On peut aussi penser qu'on va choisir, soit deux éléments de A de $C(n, 2)$ manières, soit deux éléments de B de $C(n, 2)$ manières, ou un élément de A et un élément de B de $n \cdot n$ manières. En comparant les deux façons de compter on obtient le résultat.
 (b)

$$2C(n, 2) + n^2 = 2 \frac{n(n-1)}{2} + n^2$$

Problème 4.3.50

Problème : Démontrez que si n est un entier positif, alors

$$C(2n, 2) = 2C(n, 2) + n^2.$$

- (a) en utilisant un argument combinatoire.
 (b) à l'aide de manipulations algébriques.

Résolution : (a) Soient A et B deux ensembles disjoints de cardinalité n . On va choisir deux éléments de $A \cup B$. On peut le faire directement de $C(2n, 2)$ manières, car $|A \cup B| = 2n$. On peut aussi penser qu'on va choisir, soit deux éléments de A de $C(n, 2)$ manières, soit deux éléments de B de $C(n, 2)$ manières, ou un élément de A et un élément de B de $n \cdot n$ manières. En comparant les deux façons de compter on obtient le résultat.

(b)

$$2C(n, 2) + n^2 = 2 \frac{n(n-1)}{2} + n^2 = n(n-1+n) = n(2n-1)$$

Problème 4.3.50

Problème : Démontrez que si n est un entier positif, alors

$$C(2n, 2) = 2C(n, 2) + n^2.$$

- (a) en utilisant un argument combinatoire.
 (b) à l'aide de manipulations algébriques.

Résolution : (a) Soient A et B deux ensembles disjoints de cardinalité n . On va choisir deux éléments de $A \cup B$. On peut le faire directement de $C(2n, 2)$ manières, car $|A \cup B| = 2n$. On peut aussi penser qu'on va choisir, soit deux éléments de A de $C(n, 2)$ manières, soit deux éléments de B de $C(n, 2)$ manières, ou un élément de A et un élément de B de $n \cdot n$ manières. En comparant les deux façons de compter on obtient le résultat.

(b)

$$\begin{aligned} 2C(n, 2) + n^2 &= 2 \frac{n(n-1)}{2} + n^2 = n(n-1) + n^2 = n(n-1+n) = n(2n-1) \\ &= \frac{2n(2n-1)}{2} = C(2n, 2) \end{aligned}$$

Problème 4.6.10

Problème : Une boulangerie vend des croissants nature, aux cerises, au chocolat, aux amandes, aux pommes et au brocoli. De combien de façons pouvez-vous choisir

- 1 une douzaine de croissants ?
- 2 trois douzaines de croissants ?
- 3 deux douzaines de croissants comportant au moins deux croissants de chaque sorte ?
- 4 deux douzaines de croissants ne comportant pas plus de deux croissants au brocoli ?

Problème 4.6.10

Problème : Une boulangerie vend des croissants nature, aux cerises, au chocolat, aux amandes, aux pommes et au brocoli. De combien de façons pouvez-vous choisir

- 1 une douzaine de croissants ? $C(12 + 6 - 1, 12) = C(17, 12) = 6.188$ façons.
- 2 trois douzaines de croissants ?
- 3 deux douzaines de croissants comportant au moins deux croissants de chaque sorte ?
- 4 deux douzaines de croissants ne comportant pas plus de deux croissants au brocoli ?

Problème 4.6.10

Problème : Une boulangerie vend des croissants nature, aux cerises, au chocolat, aux amandes, aux pommes et au brocoli. De combien de façons pouvez-vous choisir

- ① une douzaine de croissants ? $C(12 + 6 - 1, 12) = C(17, 12) = 6.188$ façons.
- ② trois douzaines de croissants ?
 $C(36 + 6 - 1, 36) = C(41, 36) = 749.398$ façons.
- ③ deux douzaines de croissants comportant au moins deux croissants de chaque sorte ?
- ④ deux douzaines de croissants ne comportant pas plus de deux croissants au brocoli ?

Problème 4.6.10

Problème : Une boulangerie vend des croissants nature, aux cerises, au chocolat, aux amandes, aux pommes et au brocoli. De combien de façons pouvez-vous choisir

- ① une douzaine de croissants ? $C(12 + 6 - 1, 12) = C(17, 12) = 6.188$ façons.
- ② trois douzaines de croissants ?
 $C(36 + 6 - 1, 36) = C(41, 36) = 749.398$ façons.
- ③ deux douzaines de croissants comportant au moins deux croissants de chaque sorte ? **D'abord on choisit les deux croissants de chaque sorte.**
- ④ deux douzaines de croissants ne comportant pas plus de deux croissants au brocoli ?

Problème 4.6.10

Problème : Une boulangerie vend des croissants nature, aux cerises, au chocolat, aux amandes, aux pommes et au brocoli. De combien de façons pouvez-vous choisir

- 1 une douzaine de croissants ? $C(12 + 6 - 1, 12) = C(17, 12) = 6.188$ façons.
- 2 trois douzaines de croissants ?
 $C(36 + 6 - 1, 36) = C(41, 36) = 749.398$ façons.
- 3 deux douzaines de croissants comportant au moins deux croissants de chaque sorte ? D'abord on choisit les deux croissants de chaque sorte. Il reste une douzaine à choisir de n'importe quelle sorte.
- 4 deux douzaines de croissants ne comportant pas plus de deux croissants au brocoli ?

Problème 4.6.10

Problème : Une boulangerie vend des croissants nature, aux cerises, au chocolat, aux amandes, aux pommes et au brocoli. De combien de façons pouvez-vous choisir

- 1 une douzaine de croissants ? $C(12 + 6 - 1, 12) = C(17, 12) = 6.188$ façons.
- 2 trois douzaines de croissants ?
 $C(36 + 6 - 1, 36) = C(41, 36) = 749.398$ façons.
- 3 deux douzaines de croissants comportant au moins deux croissants de chaque sorte ? D'abord on choisit les deux croissants de chaque sorte. Il reste une douzaine à choisir de n'importe quelle sorte.
 $C(12 + 6 - 1, 12) = C(17, 12) = 6.188$ façons.
- 4 deux douzaines de croissants ne comportant pas plus de deux croissants au brocoli ?

Problème 4.6.10

Problème : Une croissanterie vend des croissants nature, aux cerises, au chocolat, aux amandes, aux pommes et au brocoli. De combien de façons pouvez-vous choisir

- ① une douzaine de croissants ? $C(12 + 6 - 1, 12) = C(17, 12) = 6.188$ façons.
- ② trois douzaines de croissants ?
 $C(36 + 6 - 1, 36) = C(41, 36) = 749.398$ façons.
- ③ deux douzaines de croissants comportant au moins deux croissants de chaque sorte ? D'abord on choisit les deux croissants de chaque sorte. Il reste une douzaine à choisir de n'importe quelle sorte.
 $C(12 + 6 - 1, 12) = C(17, 12) = 6.188$ façons.
- ④ deux douzaines de croissants ne comportant pas plus de deux croissants au brocoli ? On peut choisir les croissant sans restrictions de $C(24 + 6 - 1, 24) = C(29, 24)$ façons.

Problème 4.6.10

Problème : Une boulangerie vend des croissants nature, aux cerises, au chocolat, aux amandes, aux pommes et au brocoli. De combien de façons pouvez-vous choisir

- ① une douzaine de croissants ? $C(12 + 6 - 1, 12) = C(17, 12) = 6.188$ façons.
- ② trois douzaines de croissants ?
 $C(36 + 6 - 1, 36) = C(41, 36) = 749.398$ façons.
- ③ deux douzaines de croissants comportant au moins deux croissants de chaque sorte ? D'abord on choisit les deux croissants de chaque sorte. Il reste une douzaine à choisir de n'importe quelle sorte.
 $C(12 + 6 - 1, 12) = C(17, 12) = 6.188$ façons.
- ④ deux douzaines de croissants ne comportant pas plus de deux croissants au brocoli ? On peut choisir les croissant sans restrictions de $C(24 + 6 - 1, 24) = C(29, 24)$ façons. On peut choisir au moins trois croissants de brocoli de $C(21 + 6 - 1, 21) = C(26, 21)$ façons.

Problème 4.6.10

Problème : Une boulangerie vend des croissants nature, aux cerises, au chocolat, aux amandes, aux pommes et au brocoli. De combien de façons pouvez-vous choisir

- 1 une douzaine de croissants ? $C(12 + 6 - 1, 12) = C(17, 12) = 6.188$ façons.
- 2 trois douzaines de croissants ?
 $C(36 + 6 - 1, 36) = C(41, 36) = 749.398$ façons.
- 3 deux douzaines de croissants comportant au moins deux croissants de chaque sorte ? D'abord on choisit les deux croissants de chaque sorte. Il reste une douzaine à choisir de n'importe quelle sorte.
 $C(12 + 6 - 1, 12) = C(17, 12) = 6.188$ façons.
- 4 deux douzaines de croissants ne comportant pas plus de deux croissants au brocoli ? On peut choisir les croissant sans restrictions de $C(24 + 6 - 1, 24) = C(29, 24)$ façons. On peut choisir au moins trois croissants de brocoli de $C(21 + 6 - 1, 21) = C(26, 21)$ façons. On a $C(29, 24) - C(26, 21) = 20.349$ façons.

Problème 4.6.10 (continuation)

Problème : Une boulangerie vend des croissants nature, aux cerises, au chocolat, aux amandes, aux pommes et au brocoli. De combien de façons pouvez-vous choisir

- ① deux douzaines de croissants comportant au moins cinq croissants au chocolat et au moins trois croissants aux amandes ?
- ② deux douzaines de croissants comportant au moins un croissant nature, au moins deux croissants aux cerises, au moins trois croissants au chocolat, au moins un croissant aux amandes, au moins deux croissants aux pommes et pas plus de trois croissants au brocoli ?

Problème 4.6.10 (continuation)

Problème : Une boulangerie vend des croissants nature, aux cerises, au chocolat, aux amandes, aux pommes et au brocoli. De combien de façons pouvez-vous choisir

- 1 deux douzaines de croissants comportant au moins cinq croissants au chocolat et au moins trois croissants aux amandes ? **D'abord on choisit cinq croissants au chocolat et trois croissants aux amandes.**
- 2 deux douzaines de croissants comportant au moins un croissant nature, au moins deux croissants aux cerises, au moins trois croissants au chocolat, au moins un croissant aux amandes, au moins deux croissants aux pommes et pas plus de trois croissants au brocoli ?

Problème 4.6.10 (continuation)

Problème : Une boulangerie vend des croissants nature, aux cerises, au chocolat, aux amandes, aux pommes et au brocoli. De combien de façons pouvez-vous choisir

- 1 deux douzaines de croissants comportant au moins cinq croissants au chocolat et au moins trois croissants aux amandes ? **D'abord on choisit cinq croissants au chocolat et trois croissants aux amandes. Il reste 16 à choisir de n'importe quelle sorte.**
- 2 deux douzaines de croissants comportant au moins un croissant nature, au moins deux croissants aux cerises, au moins trois croissants au chocolat, au moins un croissant aux amandes, au moins deux croissants aux pommes et pas plus de trois croissants au brocoli ?

Problème 4.6.10 (continuation)

Problème : Une boulangerie vend des croissants nature, aux cerises, au chocolat, aux amandes, aux pommes et au brocoli. De combien de façons pouvez-vous choisir

- deux douzaines de croissants comportant au moins cinq croissants au chocolat et au moins trois croissants aux amandes ? **D'abord on choisit cinq croissants au chocolat et trois croissants aux amandes. Il reste 16 à choisir de n'importe quelle sorte.**
 $C(16 + 6 - 1, 16) = C(21, 16) = 20.349$ façons.
- deux douzaines de croissants comportant au moins un croissant nature, au moins deux croissants aux cerises, au moins trois croissants au chocolat, au moins un croissant aux amandes, au moins deux croissants aux pommes et pas plus de trois croissants au brocoli ?

Problème 4.6.10 (continuation)

Problème : Une croissanterie vend des croissants nature, aux cerises, au chocolat, aux amandes, aux pommes et au brocoli. De combien de façons pouvez-vous choisir

- deux douzaines de croissants comportant au moins cinq croissants au chocolat et au moins trois croissants aux amandes ? **D'abord on choisit cinq croissants au chocolat et trois croissants aux amandes. Il reste 16 à choisir de n'importe quelle sorte.**

$$C(16 + 6 - 1, 16) = C(21, 16) = 20.349 \text{ façons.}$$

- deux douzaines de croissants comportant au moins un croissant nature, au moins deux croissants aux cerises, au moins trois croissants au chocolat, au moins un croissant aux amandes, au moins deux croissants aux pommes et pas plus de trois croissants au brocoli ? **D'abord on choisit le minimum de croissants de chaque sorte (exceptuant brocoli).**

Problème 4.6.10 (continuation)

Problème : Une boulangerie vend des croissants nature, aux cerises, au chocolat, aux amandes, aux pommes et au brocoli. De combien de façons pouvez-vous choisir

- deux douzaines de croissants comportant au moins cinq croissants au chocolat et au moins trois croissants aux amandes ? D'abord on choisit cinq croissants au chocolat et trois croissants aux amandes. Il reste 16 à choisir de n'importe quelle sorte.

$$C(16 + 6 - 1, 16) = C(21, 16) = 20.349 \text{ façons.}$$

- deux douzaines de croissants comportant au moins un croissant nature, au moins deux croissants aux cerises, au moins trois croissants au chocolat, au moins un croissant aux amandes, au moins deux croissants aux pommes et pas plus de trois croissants au brocoli ? D'abord on choisit le minimum de croissants de chaque sorte (exceptant brocoli). Il reste 15 à choisir de n'importe quelle forme mais au plus 3 de brocoli.

Problème 4.6.10 (continuation)

Problème : Une boulangerie vend des croissants nature, aux cerises, au chocolat, aux amandes, aux pommes et au brocoli. De combien de façons pouvez-vous choisir

- deux douzaines de croissants comportant au moins cinq croissants au chocolat et au moins trois croissants aux amandes ? D'abord on choisit cinq croissants au chocolat et trois croissants aux amandes. Il reste 16 à choisir de n'importe quelle sorte.

$$C(16 + 6 - 1, 16) = C(21, 16) = 20.349 \text{ façons.}$$

- deux douzaines de croissants comportant au moins un croissant nature, au moins deux croissants aux cerises, au moins trois croissants au chocolat, au moins un croissant aux amandes, au moins deux croissants aux pommes et pas plus de trois croissants au brocoli ? D'abord on choisit le minimum de croissants de chaque sorte (exceptuant brocoli). Il reste 15 à choisir de n'importe quelle forme mais au plus 3 de brocoli. On a

$$C(15 + 6 - 1, 15) - C(11 + 6 - 1, 11) = C(20, 15) - C(16, 11) = 11.136$$

Problème 4.6.15

Problème : Combien de solutions y a-t-il à l'équation

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 21$$

où y_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sont des entiers non négatifs tels que

- 1 $y_1 \geq 1$?
- 2 $y_i \geq 2$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$?
- 3 $0 \leq y_1 \leq 10$?

Problème 4.6.15

Problème : Combien de solutions y a-t-il à l'équation

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 21$$

où y_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sont des entiers non négatifs tels que

- 1 $y_1 \geq 1$? On met une croix dans la première place, puis on distribue 20 dans les 5 places.
- 2 $y_i \geq 2$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$?
- 3 $0 \leq y_1 \leq 10$?

Problème 4.6.15

Problème : Combien de solutions y a-t-il à l'équation

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 21$$

où y_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sont des entiers non négatifs tels que

- ① $y_1 \geq 1$? On met une croix dans la première place, puis on distribue 20 dans les 5 places. $C(20 + 5 - 1, 20) = C(24, 20) = 10.626$ solutions.
- ② $y_i \geq 2$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$?
- ③ $0 \leq y_1 \leq 10$?

Problème 4.6.15

Problème : Combien de solutions y a-t-il à l'équation

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 21$$

où y_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sont des entiers non négatifs tels que

- ① $y_1 \geq 1$? On met une croix dans la première place, puis on distribue 20 dans les 5 places. $C(20 + 5 - 1, 20) = C(24, 20) = 10.626$ solutions.
- ② $y_i \geq 2$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$? On met 2 croix dans chaque place, puis on distribue 11 dans les 5 places.
- ③ $0 \leq y_1 \leq 10$?

Problème 4.6.15

Problème : Combien de solutions y a-t-il à l'équation

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 21$$

où y_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sont des entiers non négatifs tels que

- ① $y_1 \geq 1$? On met une croix dans la première place, puis on distribue 20 dans les 5 places. $C(20 + 5 - 1, 20) = C(24, 20) = 10.626$ solutions.
- ② $y_i \geq 2$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$? On met 2 croix dans chaque place, puis on distribue 11 dans les 5 places.
 $C(11 + 5 - 1, 11) = C(15, 11) = 1.365$ solutions.
- ③ $0 \leq y_1 \leq 10$?

Problème 4.6.15

Problème : Combien de solutions y a-t-il à l'équation

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 21$$

où y_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sont des entiers non négatifs tels que

- ① $y_1 \geq 1$? On met une croix dans la première place, puis on distribue 20 dans les 5 places. $C(20 + 5 - 1, 20) = C(24, 20) = 10.626$ solutions.
- ② $y_i \geq 2$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$? On met 2 croix dans chaque place, puis on distribue 11 dans les 5 places.
 $C(11 + 5 - 1, 11) = C(15, 11) = 1.365$ solutions.
- ③ $0 \leq y_1 \leq 10$? On compte tout et on soustrait les cas défavorables.

Problème 4.6.15

Problème : Combien de solutions y a-t-il à l'équation

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 21$$

où y_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sont des entiers non négatifs tels que

- 1 $y_1 \geq 1$? On met une croix dans la première place, puis on distribue 20 dans les 5 places. $C(20 + 5 - 1, 20) = C(24, 20) = 10.626$ solutions.
- 2 $y_i \geq 2$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$? On met 2 croix dans chaque place, puis on distribue 11 dans les 5 places.
 $C(11 + 5 - 1, 11) = C(15, 11) = 1.365$ solutions.
- 3 $0 \leq y_1 \leq 10$? On compte tout et on soustrait les cas défavorables.
 $C(21 + 5 - 1, 21) - C(10 + 5 - 1, 10) = C(25, 21) - C(14, 10) = 11.649$ solutions.

Problème 4.6.15

Problème : Combien de solutions y a-t-il à l'équation

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 21$$

où y_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sont des entiers non négatifs tels que

① $0 \leq y_1 \leq 3$, $1 \leq y_2 < 4$ et $y_3 \geq 15$?

Résolution :

Problème 4.6.15

Problème : Combien de solutions y a-t-il à l'équation

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 21$$

où y_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sont des entiers non négatifs tels que

① $0 \leq y_1 \leq 3$, $1 \leq y_2 < 4$ et $y_3 \geq 15$?

Résolution : On met une croix dans la deuxième place, et 15 dans la troisième.

Problème 4.6.15

Problème : Combien de solutions y a-t-il à l'équation

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 21$$

où y_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sont des entiers non négatifs tels que

① $0 \leq y_1 \leq 3$, $1 \leq y_2 < 4$ et $y_3 \geq 15$?

Résolution : On met une croix dans la deuxième place, et 15 dans la troisième. Il reste à résoudre

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 5$$

avec $0 \leq z_1 \leq 3$, $0 \leq z_2 < 3$ et $0 \leq z_3, z_4, z_5$.

Problème 4.6.15

Problème : Combien de solutions y a-t-il à l'équation

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 21$$

où y_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sont des entiers non négatifs tels que

① $0 \leq y_1 \leq 3$, $1 \leq y_2 < 4$ et $y_3 \geq 15$?

Résolution : On met une croix dans la deuxième place, et 15 dans la troisième. Il reste à résoudre

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 5$$

avec $0 \leq z_1 \leq 3$, $0 \leq z_2 < 3$ et $0 \leq z_3, z_4, z_5$. Le total de solutions sans restrictions est

Problème 4.6.15

Problème : Combien de solutions y a-t-il à l'équation

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 21$$

où y_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sont des entiers non négatifs tels que

① $0 \leq y_1 \leq 3$, $1 \leq y_2 < 4$ et $y_3 \geq 15$?

Résolution : On met une croix dans la deuxième place, et 15 dans la troisième. Il reste à résoudre

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 5$$

avec $0 \leq z_1 \leq 3$, $0 \leq z_2 < 3$ et $0 \leq z_3, z_4, z_5$. Le total de solutions sans restrictions est $C(5 + 5 - 1, 5) = C(9, 5) = 126$.

Problème 4.6.15

Problème : Combien de solutions y a-t-il à l'équation

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 21$$

où y_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sont des entiers non négatifs tels que

① $0 \leq y_1 \leq 3$, $1 \leq y_2 < 4$ et $y_3 \geq 15$?

Résolution : On met une croix dans la deuxième place, et 15 dans la troisième. Il reste à résoudre

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 5$$

avec $0 \leq z_1 \leq 3$, $0 \leq z_2 < 3$ et $0 \leq z_3, z_4, z_5$. Le total de solutions sans restrictions est $C(5 + 5 - 1, 5) = C(9, 5) = 126$. Le nombre de solutions avec $z_1 = 4$ est 4 et avec $z_1 = 5$ est 1.

Problème 4.6.15

Problème : Combien de solutions y a-t-il à l'équation

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 21$$

où y_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sont des entiers non négatifs tels que

① $0 \leq y_1 \leq 3$, $1 \leq y_2 < 4$ et $y_3 \geq 15$?

Résolution : On met une croix dans la deuxième place, et 15 dans la troisième. Il reste à résoudre

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 5$$

avec $0 \leq z_1 \leq 3$, $0 \leq z_2 < 3$ et $0 \leq z_3, z_4, z_5$. Le total de solutions sans restrictions est $C(5 + 5 - 1, 5) = C(9, 5) = 126$. Le nombre de solutions avec $z_1 = 4$ est 4 et avec $z_1 = 5$ est 1. Le nombre de solutions avec $z_2 = 3$ est $C(2 + 4 - 1, 2) = C(5, 2) = 10$, avec $z_2 = 4$ est 4, et avec $z_2 = 5$ est 1.

Problème 4.6.15

Problème : Combien de solutions y a-t-il à l'équation

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 21$$

où y_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sont des entiers non négatifs tels que

① $0 \leq y_1 \leq 3$, $1 \leq y_2 < 4$ et $y_3 \geq 15$?

Résolution : On met une croix dans la deuxième place, et 15 dans la troisième. Il reste à résoudre

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 5$$

avec $0 \leq z_1 \leq 3$, $0 \leq z_2 < 3$ et $0 \leq z_3, z_4, z_5$. Le total de solutions sans restrictions est $C(5 + 5 - 1, 5) = C(9, 5) = 126$. Le nombre de solutions avec $z_1 = 4$ est 4 et avec $z_1 = 5$ est 1. Le nombre de solutions avec $z_2 = 3$ est $C(2 + 4 - 1, 2) = C(5, 2) = 10$, avec $z_2 = 4$ est 4, et avec $z_2 = 5$ est 1. On a un total de $126 - (4 + 1) - (10 + 4 + 1) = 106$ solutions.

Problème 4.6.20

Problème : Combien de solutions y a-t-il à l'inéquation

$$y_1 + y_2 + y_3 \leq 11,$$

où y_1, y_2 et y_3 sont des entiers non négatifs ?

(Conseil : Utilisez une variable auxiliaire y_4 telle que

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11.)$$

Résolution :

Problème 4.6.20

Problème : Combien de solutions y a-t-il à l'inéquation

$$y_1 + y_2 + y_3 \leq 11,$$

où y_1, y_2 et y_3 sont des entiers non négatifs ?

(Conseil : Utilisez une variable auxiliaire y_4 telle que

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11.)$$

Résolution : Chaque solution de $y_1 + y_2 + y_3 \leq 11$ donne exactement une solution de $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$ en prenant $y_4 = 11 - (y_1 + y_2 + y_3)$.

Problème 4.6.20

Problème : Combien de solutions y a-t-il à l'inéquation

$$y_1 + y_2 + y_3 \leq 11,$$

où y_1, y_2 et y_3 sont des entiers non négatifs ?

(Conseil : Utilisez une variable auxiliaire y_4 telle que $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$.)

Résolution : Chaque solution de $y_1 + y_2 + y_3 \leq 11$ donne exactement une solution de $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$ en prenant $y_4 = 11 - (y_1 + y_2 + y_3)$. Le nombre de solutions de $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$ est

$$C(11 + 4 - 1, 11) = C(14, 11) = 364.$$

Problème 4.6.37

Problème : De combien de façons pouvez-vous distribuer des mains de 7 cartes à chacun des cinq joueurs à partir d'un jeu de 52 cartes ?

Résolution :

Problème 4.6.37

Problème : De combien de façons pouvez-vous distribuer des mains de 7 cartes à chacun des cinq joueurs à partir d'un jeu de 52 cartes ?

Résolution : On choisit 7 cartes pour le premier joueur, 7 cartes parmi les cartes restantes pour le deuxième joueur, etc.

Problème 4.6.37

Problème : De combien de façons pouvez-vous distribuer des mains de 7 cartes à chacun des cinq joueurs à partir d'un jeu de 52 cartes ?

Résolution : On choisit 7 cartes pour le premier joueur, 7 cartes parmi les cartes restantes pour le deuxième joueur, etc.

$$C(52, 7)C(45, 7)C(38, 7)C(31, 7)C(24, 7) = \frac{52!}{7!7!7!7!17!}.$$