MAT1500–Mathématiques discrètes

Matilde N. Lalín

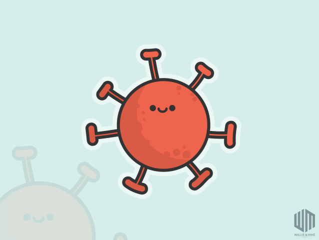
Université de Montréal
http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin/mat1500

Le 14 avril 2020

Université de Montréal

Le menu d'aujourd'hui

- Annonces
- Problèmes de révision des chapitres 3.3, 4.1, 4.2, 4.3, 4.6, du manuel.



Université de Montréal

Annonces

- Problèmes de révision sur
  http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin/mat1500
- Test bidon disponible sur Studium.
- Code d'honneur sur Studium! Il faut le **signer** pour avoir accès à l'examen final.

Université de Montréal

Les instructions de l'examen final

- Dans cet examen, vous avez 20 questions à répondre par choix multiple avec un total de 60 points.
- Le test est disponible le 24 avril 2020 de 13h à 16h15.
- Vous avez un total de 3 heures pour faire l'examen pourvu que vous commenciez l'examen avant 13h15.
- L'examen ferme à 16h15.
- Assurez-vous d'avoir du papier pour vos calculs.
- Vous pouvez vous servir d'une calculatrice simple.
- Vous pouvez vous servir des documents qui se trouvent dans le site web du cours `https://dms.umontreal.ca/ mlalin/mat1500`, et dans le site Studium du cours.
- Vous pouvez vous servir des chapitres du livre qui sont disponibles sur Studium (chapitres 4, 5, et A3), mais vous ne pouvez pas vous servir des autres chapitres du livre ni d'autres documents.
- Faites l'examen par vous-même, sans l'aide d'autres personnes.
- Lisez attentivement les questions.

Problème 3.2.22

Problème : Quelles sommes d'argent pouvez-vous former en utilisant des pièces de 10 et de 25 cents ? Prouvez votre réponse en utilisant l'une des formes du principe de l'induction.

Résolution : On peut former les 10 cents, et toutes les multiples de 5 cents à partir de 20 cents. Soit $P(n) =\ll$ on peut former $5n \gg$, $P(2)$ est V parce que $10 = 1 \cdot 10$ et on veut prouver $P(n)$ est V pour $n \geq 4$. $P(4)$ est V parce que $20 = 2 \cdot 10$. Supposons que $P(n)$ est V.

Si $5n = r10 + s25$ avec $s > 0$, on a $5(n+1) = (r+3)10 + (s-1)25$ et $P(n+1)$ est V.

Si $5n = r10$ avec $r > 1$ et $5(n+1) = (r-2)10 + 25$ et $P(n+1)$ est V.

Alors, $P(n)$ implique $P(n+1)$ et $P(n)$ est V pour $n \geq 4$ par induction (et $P(2)$ est V aussi).

Problème 5.5.8

Problème : Combien y a-t-il de fonctions surjectives d'un ensemble à sept éléments dans un ensemble à cinq éléments ?

Résolution : On prouvera que le nombre est

$$5^7 - C(5,1)4^7 + C(5,2)3^7 - C(5,3)2^7 + C(5,4)1^7 = 16.800.$$

Soit

$$P_i = \{f : \{a_1, \ldots, a_7\} \to \{b_1, \ldots, b_5\} \mid b_i \notin \mathrm{Im}(f)\}.$$

On a donc que f est surjective si et seulement si $f \in P_1' \ldots P_5'$.
Le total de fonctions est $N = 5^7$, $N(P_i) = 4^7$ et il y a $C(5,1)$ termes de ce type, $N(P_iP_j) = 3^7$ et il y a $C(5,2)$ termes de ce type, ...
$N(P_1 \cdots \widehat{P}_j \cdots P_5) = 1^7$ (la notation $\widehat{P}_j$ indique qu'il faut enlever le terme) et il y a $C(5,4)$ termes de ce type et $N(P_1 \cdots P_5) = 0$.
En applicant la formule d'inclusion-exclusion, nous obtenons le résultat.

Problème 3.3.14

Problème : Démontrez que $f_0 - f_1 + f_2 - \cdots - f_{2n-1} + f_{2n} = f_{2n-1} - 1$ lorsque n est un entier positif.

Résolution : $P(1)$ est V, parce que $f_0 - f_1 + f_2 = 0 - 1 + 1 = 0$ et $f_1 - 1 = 1 - 1 = 0$. Supposons que $P(n)$ est V. Nous avons

$$\begin{aligned} f_0 - f_1 + f_2 - \cdots - f_{2n-1} + f_{2n} - f_{2n+1} + f_{2n+2} &= f_{2n-1} - 1 - f_{2n+1} + f_{2n+2} \\ &= f_{2n-1} - 1 + f_{2n} \\ &= f_{2n+1} - 1 \\ &= f_{2(n+1)-1} - 1 \end{aligned}$$

On a donc que $P(n+1)$ est V et que l'enoncé est V par induction pour $n \geq 1$.

Université de Montréal

Problème 4.1.17

Problème : Combien d'entiers positifs ayant exactement trois chiffres décimaux, c'est-à-dire des entiers positifs compris entre 100 et 999 inclusivement,

1. sont divisibles par 7 ? Il y a $\left\lfloor \frac{999}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{7} \right\rfloor = 142 - 14 = 128$ nombres divisibles par 7.
2. sont impairs ? il y a $\left\lfloor \frac{999}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{2} \right\rfloor = 499 - 49 = 450$ nombres pairs. Donc $900 - 450 = 450$ nombres impairs.
3. ont trois chiffres décimaux identiques ? Il y a 9 nombres avec les chiffres identiques: $111, 222, 333, \dots, 999$.
4. ne sont pas divisibles par 4 ? Il y a $\left\lfloor \frac{999}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{4} \right\rfloor = 249 - 24 = 225$ nombres divisibles par 4. Donc $900 - 225 = 675$ nombres non divisibles par 4.

Problème 4.1.17

Problème : Combien d'entiers positifs ayant exactement trois chiffres décimaux, c'est-à-dire des entiers positifs compris entre 100 et 999 inclusivement,

1. sont divisibles par 3 et par 4 ? $\left\lfloor \frac{999}{12} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{12} \right\rfloor = 83 - 8 = 75$ divisibles par 3 et par 4.
2. sont divisibles par 3 ou par 4 ? $\left\lfloor \frac{999}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{3} \right\rfloor = 333 - 33 = 300$ divisibles par 3. 225 divisibles par 4. 75 divisibles par 12. Inclusion-exclusion donne $300 + 225 - 75 = 450$ divisibles par 3 ou par 4.
3. ne sont divisibles ni par 3 ni par 4 ? 450 divisibles par 3 ou par 4. Donc $900 - 450 = 450$ non divisibles ni par 3 ni par 4.
4. sont divisibles par 3 mais non par 4 ? 300 divisibles par 3 et 75 divisibles par 3 et par 4. Donc $300 - 75 = 225$ sont divisibles par 3 mais non par 4.

Université de Montréal

Problème 4.1.38

Problème : Combien de chaînes binaires de longueur 10 contiennent soit cinq 0 consécutifs, soit cinq 1 consécutifs ?

Résolution : On compte d'abord les chaînes avec cinq ou plus 0 consécutifs. On a 2^5 chaînes du type $00000XXXXX$, 2^4 chaînes du type $100000XXXX$, 2^4 chaînes du type $X100000XXX$, 2^4 chaînes du type $XX100000XX$, 2^4 chaînes du type $XXX100000X$, et 2^4 chaînes du type $XXXX100000$. Cela donne

$$2^5 + 2^4 \cdot 5 = 112$$

chaînes avec cinq ou plus 0 consécutifs. Par symétrie, il y a aussi 112 chaînes avec cinq ou plus 1 consécutifs. Finalement, il y a deux chaînes avec exactement cinq 0 et cinq 1 consécutifs (0000011111 et 1111100000). Par le principe de l'inclusion-exclusion, on a donc

$$112 + 112 - 2 = 222$$

chaînes binaires avec les conditions demandées.

Problème 4.1.51

Problème : Combien de diagonales un polygone convexe à n côtés a-t-il ? (Un polygone est convexe si chaque segment de droite reliant deux points de l'intérieur ou de la frontière du polygone est situé à l'intérieur de cet ensemble.)

Résolution : Chaque diagonale connecte deux sommets du polygone qui ne sont pas déjà connectés par un côté. Il y a $n-3$ diagonales qui sortent de chaque sommet. En multipliant par n, on a compté chaque diagonale deux fois. On trouve donc

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

diagonales.

Problème 4.2.13

Problème : Une entreprise emmagasine des produits dans un entrepôt. Les boîtes d'entreposage de cet entrepôt sont identifiées en fonction des allées et des étagères. L'entrepôt comprend 50 allées, 85 emplacements horizontaux dans chaque allée et 5 étagères. Quel est le plus petit nombre de produits que peut entreposer l'entreprise pour qu'au moins deux produits soient contenus dans la même boîte ?

Résolution : Par le principe de nids de pigeon, le nombre minimal est

$$50 \cdot 85 \cdot 5 + 1 = 21.251.$$

Problème 4.2.27

Problème : Un réseau est constitué de 6 ordinateurs. Chaque ordinateur est directement relié à 0 ordinateur ou à plusieurs autres ordinateurs. Démontrez qu'il y a au moins 2 ordinateurs dans le réseau qui sont directement reliés au même nombre d'ordinateurs.

Résolution : Soit a_i le nombre d'ordinateurs reliés à l'ordinateur i. On a que $\forall i\, a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Supposons que tous les a_i sont différents. Il y a un i tel que $a_i = 5$. Cela veut dire qu'il y a un ordinateur qui est connecté a tous les autres. Mais dans ce cas, tous les a_i sont positifs. Donc, $a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Comme il y a 6 ordinateurs, par le principe de nids de pigeon, il doit avoir au moins deux ordinateurs qui sont reliés au même nombre d'ordinateurs.

Problème 4.2.32

Problème : Supposez qu'il y a au moins 9 étudiants inscrits à un cours de mathématiques discrètes dans une petite université.

1. Démontrez qu'il doit y avoir au moins 5 étudiants ou au moins 5 étudiantes inscrits à ce cours.
2. Démontrez qu'il doit y avoir au moins 3 étudiants ou au moins 7 étudiantes inscrits à ce cours.

(On suppose ici qu'il n'y a pas que deux genres.)

Résolution : (1) Supposons que non. Il y a au plus 4 étudiants et au plus 4 étudiantes. On obtient donc au plus $4 + 4 = 8$ étudiants, contradiction.
(2) Supposons que non. Il y a au plus 2 étudiants et au plus 6 étudiantes. On obtient donc au plus $2 + 6 = 8$ étudiants, contradiction.

Problème 4.3.24

Problème : Combien des chaînes de 6 lettres de l'alphabet anglais contiennent

- la lettre a ? $26^6 - 25^6$.
- les lettres a et b ? Inclusion-exclusion : $26^6 - 2 \cdot 25^6 + 24^6$.
- les lettres a et b de façon consécutive lorsque a précède b et que toutes les lettres sont distinctes ? Choisir la place pour ab de 5 manières. Pour les autres places, il y a $P(24, 4)$ possibilités. Le total est donc $5P(24, 4)$.
- les lettres a et b, alors que a se trouve quelque part à gauche de b dans la chaîne et que toutes les lettres sont distinctes ? Choisir les places pour a et b de $C(6, 2)$ manières. Choisir les autres lettres de $P(24, 4)$ manières. Le total est donc $C(6, 2)P(24, 4)$.

Université de Montréal

Problème 4.3.29

Problème : Combien des chaînes binaires de longueur 10 contiennent au moins trois 1 et au moins trois 0 ?

Résolution : Il faut considérer trois 1 et sept 0, quatre 1 et six 0, etc jusqu'à sept 1 et trois 0. Cela donne

$$\begin{aligned} & C(10,3)+C(10,4)+C(10,5)+C(10,6)+C(10,7) \\ = & 120+210+252+210+120 \\ = & 912. \end{aligned}$$

Université de Montréal

Problème 4.3.39

Problème : Quel est le coefficient de x^9 dans $(2-x)^{19}$?

Résolution : Rappelons que $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n C(n,k)x^k y^{n-k}$. On a donc

$$C(19,9)(-1)^9 2^{10}.$$

Problème 4.3.50

Problème : Démontrez que si n est un entier positif, alors

$$C(2n,2) = 2C(n,2) + n^2.$$

(a) en utilisant un argument combinatoire.
(b) à l'aide de manipulations algébriques.

Résolution : (a) Soient A et B deux ensembles disjoints de cardinalité n. On va choisir deux éléments de $A \cup B$. On peut le faire directement de $C(2n,2)$ manières, car $|A \cup B| = 2n$. On peut aussi penser qu'on va choisir, soit deux éléments de A de $C(n,2)$ manières, soit deux éléments de B de $C(n,2)$ manières, ou un élément de A et un élément de B de $n \cdot n$ manières. En comparant les deux façons de compter on obtient le résultat.
(b)

$$\begin{aligned} 2C(n,2) + n^2 =& 2\frac{n(n-1)}{2} + n^2 = n(n-1+n) = n(2n-1) \\ =& \frac{2n(2n-1)}{2} = C(2n,2) \end{aligned}$$

Problème 4.6.10

Problème : Une croissanterie vend des croissants nature, aux cerises, au chocolat, aux amandes, aux pommes et au brocoli. De combien de façons pouvez-vous choisir

1. une douzaine de croissants ? $C(12+6-1,12) = C(17,12) = 6.188$ façons.
2. trois douzaines de croissants ? $C(36+6-1,36) = C(41,36) = 749.398$ façons.
3. deux douzaines de croissants comportant au moins deux croissants de chaque sorte ? D'abord on choisit les deux croissants de chaque sorte. Il reste une douzaine à choisir de n'importe quelle sorte. $C(12+6-1,12) = C(17,12) = 6.188$ façons.
4. deux douzaines de croissants ne comportant pas plus de deux croissants au brocoli ? On peut choisir les croissant sans restrictions de $C(24+6-1,24) = C(29,24)$ façons. On peut choisir au moins trois croissants de brocoli de $C(21+6-1,21) = C(26,21)$ façons. On a $C(29,24) - C(26,21) = 20.349$ façons.

Problème 4.6.10 (continuation)

Problème : Une croissanterie vend des croissants nature, aux cerises, au chocolat, aux amandes, aux pommes et au brocoli. De combien de façons pouvez-vous choisir

1. deux douzaines de croissants comportant au moins cinq croissants au chocolat et au moins trois croissants aux amandes ? D'abord on choisit cinq croissants au chocolat et trois croissants aux amandes. Il reste 16 à choisir de n'importe quelle sorte.
   $C(16+6-1,16)=C(21,16)=20.349$ façons.
2. deux douzaines de croissants comportant au moins un croissant nature, au moins deux croissants aux cerises, au moins trois croissants au chocolat, au moins un croissant aux amandes, au moins deux croissants aux pommes et pas plus de trois croissants au brocoli ? D'abord on choisit le minimum de croissants de chaque sorte (exeptuant brocoli). Il reste 15 à choisir de n'importe quelle forme mais au plus 3 de brocoli. On a
   $C(15+6-1,15)-C(11+6-1,11)=C(20,15)-C(16,11)=11.136$

Université de Montréal

Problème 4.6.15

Problème : Combien de solutions y a-t-il à l'équation

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 21$$

où y_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sont des entiers non négatifs tels que

1. $y_1 \geq 1$? On met une croix dans la première place, puis on distribue 20 dans les 5 places. $C(20 + 5 - 1, 20) = C(24, 20) = 10.626$ solutions.
2. $y_i \geq 2$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$? On met 2 croix dans chaque place, puis on distribue 11 dans les 5 places. $C(11 + 5 - 1, 11) = C(15, 11) = 1.365$ solutions.
3. $0 \leq y_1 \leq 10$? On compte tout et on substrait les cas desfavorables. $C(21+5-1, 21) - C(10+5-1, 10) = C(25, 21) - C(14, 10) = 11.649$ solutions.

Problème 4.6.15

Problème : Combien de solutions y a-t-il à l'équation

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 21$$

où y_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sont des entiers non négatifs tels que

1. $0 \leq y_1 \leq 3$, $1 \leq y_2 < 4$ et $y_3 \geq 15$?

Résolution : On met une croix dans la deuxième place, et 15 dans la troisième. Il reste à résoudre

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 5$$

avec $0 \leq z_1 \leq 3$, $0 \leq z_2 < 3$ et $0 \leq z_3, z_4, z_5$. Le total de solutions sans restrictions est $C(5+5-1, 5) = C(9, 5) = 126$. Le nombre de solutions avec $z_1 = 4$ est 4 et avec $z_1 = 5$ est 1. Le nombre de solutions avec $z_2 = 3$ est $C(2+4-1, 2) = C(5, 2) = 10$, avec $z_2 = 4$ est 4, et avec $z_2 = 5$ est 1. On a un total de $126 - (4+1) - (10+4+1) = 106$ solutions.

Problème 4.6.20

Problème : Combien de solutions y a-t-il à l'inéquation

$$y_1 + y_2 + y_3 \leq 11,$$

où y_1, y_2 et y_3 sont des entiers non négatifs ?
(Conseil : Utilisez une variable auxiliaire y_4 telle que $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$.)

Résolution : Chaque solution de $y_1 + y_2 + y_3 \leq 11$ donne exactement une solution de $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$ en prenant $y_4 = 11 - (y_1 + y_2 + y_3)$. Le nombre de solutions de $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$ est

$$C(11 + 4 - 1, 11) = C(14, 11) = 364.$$

Université de Montréal

Problème 4.6.37

Problème : De combien de façons pouvez-vous distribuer des mains de 7 cartes à chacun des cinq joueurs à partir d'un jeu de 52 cartes ?

Résolution : On choisit 7 cartes pour le premier joueur, 7 cartes parmi les cartes restantes pour le deuxième joueur, etc.

$$C(52,7)C(45,7)C(38,7)C(31,7)C(24,7) = \frac{52!}{7!7!7!7!7!17!}.$$