MAT1500–Mathématiques discrètes

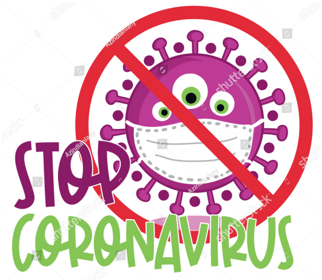
Matilde N. Lalín

Université de Montréal
http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin/mat1500

Le 7 avril 2020

Le menu d'aujourd'hui

- Annonces
- Rappel A3 fonctions génératrices
- A3 fonctions génératrices. Applications.
- Derniers problèmes du test bidon.
- Problèmes de révision des chapitres 3.2 du manuel.



Annonces

- Problèmes de révision sur `http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin/mat1500`
- Code d'honneur sur Studium! Il faut le signer pour avoir accès à l'examen final
- Test bidon disponible sur Studium.

Annonces

- Examen final sur Studium.
- Date du final retenue : 24 avril.
- Barème retenue : intra 40%, final 60%.
- La date limite pour abandonner le cours : 15 avril.
- Code d'honneur sur Studium! Il faut le signer pour avoir accès à l'examen final

Rappel de A.3 Fonctions génératrices

Soient $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$, fonctions génératrices convergentes dans $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

- Formule de Taylor: $a_k = \frac{G^{(k)}(0)}{k!}$
- $G(x) + H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$
- $G(x)H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right) x^k$
- $G'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$

Cas particuliers

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$, $|x| < 1$
- $\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{k=0}^{\infty} C(m+k-1, k) x^k$, $|x| < 1$
- $(1+x)^m = C(m,0) + C(m,1)x + \cdots + C(m, m-1)x^{m-1} + C(m,m)x^m$, $m > 0$

Université de Montréal

Rappel de A.3 Fonctions génératrices

- Problèmes de comptage.

$$y_1 + \cdots + y_m = s$$

avec $y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{N}$ et

$$a_1 \leq y_1 \leq b_1, \ldots, a_m \leq y_m \leq b_m.$$

On considère

$$(x^{a_1} + x^{a_1+1} + \cdots + x^{b_1}) \cdots (x^{a_m} + x^{a_m+1} + \cdots + x^{b_m})$$

et on trouve le coefficient de x^s.

- Relations de récurrence.

$$a_k = c_{k-1}a_{k-1} + \cdots + c_{k-\ell}a_{k-\ell} + F(k)$$

Si $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, donc il faut considérer

$$G(x) - c_{k-1}xG(x) - c_{k-2}x^2G(x) - \cdots - c_{k-\ell}x^{\ell}G(x).$$

Énumeration de mots de code

Problème : Un système informatique considère qu'une chaîne de chiffres décimaux est un mot de code valide s'il contient un nombre pair de chiffres 0. Par exemple, 1230407869 est valide, tandis que 12098700 ne l'est pas. Soit a_k le nombre de mots de code valides de k chiffres. Trouver la valeur de a_k.

Résolution : On a trouvé (le 24 mars, diapo 32) que

- $a_k = 8a_{k-1} + 10^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{Z}_{>0}$,
- $a_0 = 1$.

Maintenant nous voulons résoudre la récurrence !

Application des fonctions génératrices à récurrences

Problème : Résoudre la récurrence suivante

- $a_k = 8a_{k-1} + 10^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{Z}_{>0}$,
- $a_0 = 1$.

Résolution : Soit $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Alors,

$$xG(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k.$$

$$\begin{aligned}
G(x) - 8xG(x) =& \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - 8\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}x^k \\
=& a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k - 8\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}x^k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k - 8a_{k-1})x^k \\
=& 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 10^{k-1}x^k.
\end{aligned}$$

Université de Montréal

Application des fonctions génératrices à récurrences

Résolution (continuation) : Alors,

$$\begin{aligned}
G(x)(1-8x) =&1+\sum_{k=1}^{\infty} 10^{k-1}x^k\\
=&1+x\sum_{k=1}^{\infty}(10x)^{k-1}\\
=&1+x\sum_{k=0}^{\infty}(10x)^{k}\\
=&1+\frac{x}{1-10x}\\
=&\frac{1-9x}{1-10x}
\end{aligned}$$

$$G(x)=\frac{1-9x}{(1-8x)(1-10x)}$$

Université de Montréal

Rappelons que pour $|\alpha x| < 1$

$$\frac{1}{1-\alpha x} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k x^k = 1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \alpha^3 x^3 + \cdots$$

Supposons que $\alpha \neq \beta$ (et aussi $|\alpha x|, |\beta x| < 1$). On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} &= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha x} - \frac{\beta}{1-\beta x}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k x^k - \beta \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k x^k\right) \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}) x^k
\end{aligned}$$

Université de Montréal

Application des fonctions génératrices à récurrences

$$
\begin{aligned}
G(x) =& \frac{1-9x}{(1-8x)(1-10x)} = \frac{1-9x}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(10^{k+1}-8^{k+1})x^k\\
=& \sum_{k=0}^{\infty}\frac{10^{k+1}-8^{k+1}}{2}x^k - 9\sum_{k=0}^{\infty}\frac{10^{k+1}-8^{k+1}}{2}x^{k+1}\\
=& \sum_{k=0}^{\infty}\frac{10^{k+1}-8^{k+1}}{2}x^k - 9\sum_{k=1}^{\infty}\frac{10^{k}-8^{k}}{2}x^{k}\\
=& 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{10\cdot 10^{k}-8\cdot 8^{k}}{2}x^k - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{9\cdot 10^{k}-9\cdot 8^{k}}{2}x^{k}\\
=& 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{10^{k}+8^{k}}{2}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{10^{k}+8^{k}}{2}x^k
\end{aligned}
$$

On a que $a_k = \frac{10^k+8^k}{2}$.

Université de Montréal

Application des fonctions génératrices à la suite de Fibonacci

Problème : Résoudre la récurrence de Fibonacci

- $f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$ pour $k \geq 2$.
- $f_0 = 0$, $f_1 = 1$

Résolution : Soit $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$. Alors,

$$xG(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{k-1}x^k, \qquad x^2G(x) = \sum_{k=2}^{\infty} f_{k-2}x^k$$

$$\begin{aligned} xG(x) + x^2G(x) &= f_0 + \sum_{k=2}^{\infty}(f_{k-1} + f_{k-2})x^k \\ &= \sum_{k=2} f_k x^k \\ &= G(x) - f_1 x - f_0 = G(x) - x \end{aligned}$$

Université de Montréal

Application des fonctions génératrices à la suite de Fibonacci

$$G(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

$$\begin{aligned}
1-x-x^2 &= x^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-1\right) = x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\\
&= \left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)
\end{aligned}$$

Université de Montréal

Application des fonctions génératrices à la suite de Fibonacci

$$G(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

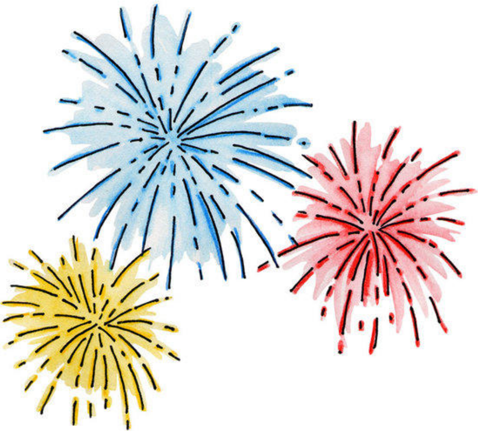
$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{x}{\sqrt{5}}\left(\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)} - \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right)x^{k+1} \end{aligned}$$

On obtient

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right).$$

Université de Montréal

Les sujets du cours finissent ici!



Université de Montréal

Curiosité : combien y a-t-il de secondes dans 6 semaines ?

Dans 6 semaines il y a

$$\begin{aligned} & 6 \times 7 \times 24 \times 60 \times 60 \text{ secondes} \\ = & 6 \times 7 \times 24 \times 5 \times 4 \times 3 \times 10 \times 2 \times 3 \text{ secondes} \\ = & 6 \times 7 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 8 \times 9 \times 10 \text{ secondes} \\ = & 10! \text{ secondes} \end{aligned}$$

$$6 \text{ semaines} = 10! = 3.628.800 \text{ secondes}$$

Université de Montréal

Problème 4, Examen Final, Automne 2016

Problème : De combien de façons peut-on distribuer 20 bonbons parmi Crystel, Fabrice, Nicolas et Noé si

(a) les 20 bonbons sont identiques et chacun des auxiliaires doit en avoir au moins un ?

(b) les 20 bonbons sont différents ? (Il est possible qu'une ou plusieurs personnes ne reçoivent aucun bonbon.)

(c) il y a 11 bonbons de chocolat identiques et 9 de fraise identiques et Fabrice n'aime pas les bonbons de fraise ? (Il est possible qu'une ou plusieurs personnes ne reçoivent aucun bonbon.)

(d) il y a 11 bonbons de chocolat identiques et 9 de fraise identiques et chacun des auxiliaires doit en avoir au moins un de chaque variété ?

Université de Montréal

Problème 4, Examen Final, Automne 2016

Résolution :
(a) les 20 bonbons sont identiques et chacun des auxiliaires doit en avoir au moins un ?
Il faut d'abord distribuer 4 bonbons (un pour chaque auxiliaire) et après 16 parmi 4 est

$$C(16+4-1,16) = C(19,16) = 969.$$

(b) les 20 bonbons sont différents ? (Il est possible qu'une ou plusieurs personnes ne reçoivent aucun bonbon.)
On assigne un personne pour chaque bonbon.

$$4^{20}$$

Université de Montréal

Problème 4, Examen Final, Automne 2016

Résolution (continuation) :

(c) il y a 11 bonbons de chocolat identiques et 9 de fraise identiques et Fabrice n'aime pas les bonbons de fraise ? (Il est possible qu'une ou plusieurs personnes ne reçoivent aucun bonbon.)

On distribue les bonbons de chocolat parmi 4 personnes, puis on distribue les bonbons de fraise parmi 3 personnes, et on applique le principe du produit.

$$C(11+4-1,11)C(9+3-1,9) = C(14,11)C(11,9) = 364 \cdot 55 = 20.020.$$

(d) il y a 11 bonbons de chocolat identiques et 9 de fraise identiques et chacun des auxiliaires doit en avoir au moins un de chaque variété ?

On distribue les bonbons de chocolat comme dans la partie (a), puis on distribue les bonbons de fraise comme dans la partie (a), et on applique le principe du produit.

$$C(7+4-1,7)C(5+4-1,5) = C(10,7)C(8,5) = 120 \cdot 56 = 6.720$$

Problème 3.2.22

Problème : Utilisez le principe de l'induction pour prouver que 6 divise $n^3 - n$ lorsque n est un entier non négatif.

Résolution : Soit

$$P(n) = \ll 6 \mid n^3 - n \gg .$$

On a que $P(0)$ est V, parce que $0^3 - 0 = 0$ et $6 \mid 0$. Supposons que $P(n)$ est V.

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - (n+1) = (n^3 - n) + 3(n^2 + n).$$

Comme on suppose $P(n)$ est V, on a $6 \mid (n^3 - n)$. Comme $n^2 + n = n(n+1)$ et un entre n ou $n+1$ doit être pair, nous avons $2 \mid 3(n^2 + n)$. Aussi $3 \mid 3(n^2 + n)$. Par conséquent $6 \mid 3(n^2 + n)$.
Finalement, $6 \mid ((n+1)^3 - (n+1))$ et $P(n+1)$ est V.
En conclusion, $P(n)$ est V par le principe d'induction.

Problème 3.2.28

Problème : Pour quels entiers non négatifs n a-t-on $n^2 \leq n!$? Démontrez votre réponse à l'aide du principe de l'induction.

Résolution : On voit que $n^2 \leq n!$ est V pour $n = 0$ $(0^2 \leq 1 = 0!)$, $n = 1$ $(1^2 = 1!)$, $n = 4$ $(4^2 = 16 \leq 24 = 4!)$. C'est F pour $n = 2$ $(2^2 = 4 > 2 = 2!)$ et $n = 3$ $(3^2 = 9 > 6 = 3!)$.
Prouvons que pour $n \geq 4$,

$$P(n) = \ll n^2 \leq n! \gg .$$

On a vu que $P(4)$ est V. Supposons que $P(n)$ est V et que $n \geq 4$.

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 &\leq n! + 2n + 1 \\
&\leq n! + 2n + n = n! + 3n \\
&\leq n! + n \cdot n \\
&\leq n! + n \cdot n! = (1+n)n! = (n+1)!
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est V. $P(n)$ est V pour $n \geq 4$ et pour $n = 0, 1$.

Problème 3.2.50

Problème : Prouvez que n lignes séparent le plan en $\frac{n^2+n+2}{2}$ faces si aucune paire de lignes n'est parallèle et que trois lignes à la fois ne passent pas par un point commun.

Résolution : Soit
$P(n) = \ll$ le nombre de faces pour n lignes est $\frac{n^2+n+2}{2} \gg$. $P(1)$ est V, parce qu'une ligne sépare le plan en 2 faces et $\frac{1^2+1+2}{2} = 2$. Supposons que $P(n)$ est V. Supposons qu'on a n lignes. Elles séparent le plan en $\frac{n^2+n+2}{2}$ faces. Quand on ajoute une ligne, elle traverse toutes les n lignes qu'on avait avant. Pour chaque point d'intersection, une nouvelle face est crée. Après le dernier point d'intersection, il y a une nouvelle face aussi. On a ajouté $n+1$ faces. Donc, le total de faces avec $n+1$ lignes est

$$\frac{n^2+n+2}{2} + n + 1 = \frac{n^2+n+2+2n+2}{2} = \frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}.$$

On a donc que $P(n+1)$ est V et que l'enoncé est V par induction pour $n \geq 1$.