MAT1500–Mathématiques discrètes

Matilde N. Lalín

Université de Montréal
http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin/mat1500

Le 3 avril 2020

Le menu d'aujourd'hui

- Annonces
- Rappel 5.5 Applications du principe d'inclusion-exclusion.
- A3 fonctions génératrices

Université de Montréal

Annonces

- Problèmes de révision sur http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin/mat1500
- Code d'honneur sur Studium! Il faut le signer pour avoir accès à l'examen final
- Test bidon disponible sur Studium.

Annonces

- Examen final sur Studium.
- Date du final retenue : 24 avril.
- Barème retenue : intra 40%, final 60%.
- La date limite pour abandonner le cours : 15 avril.
- Code d'honneur sur Studium! Il faut le signer pour avoir accès à l'examen final

Université de Montréal

Rappel de 5.5 Applications du principe d'inclusion-exclusion

- Nombre d'entiers positifs $\leq N$ qui sont divisibles par $a_1, \ldots, a_n$.
  Nombre d'entiers positifs $\leq N$ qui sont divisibles par a : $\lfloor \frac{N}{a} \rfloor$.
- Nombre d'entiers positifs $\leq N$ qui ne sont pas divisibles par $a_1, \ldots, a_n$ (Crible d'Eratosthène).
- Solutions naturelles de

$$x_1 + \cdots + x_m = s$$

avec conditions du type $x_i \leq b_i$.

Rappel de 5.5 Applications du principe d'inclusion-exclusion

Des autres applications du principe d'inclusion-exclusion :

- Dénombrement de fonctions surjectives. Il y a

$$k^m - C(k,1)(k-1)^m + C(k,2)(k-2)^m - \cdots + (-1)^{k-1}C(k,k-1)1^m$$

  fonctions $f : A \to B$ surjectives d'un ensemble $|A| = m$ dans un ensemble $|B| = k$.
- Dérangements : une permutation d'objets qui ne laisse aucun objet dans sa position originale. Il y a

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

  dérangements de n objets.

A.3 Fonctions génératrices

Définition : La série de la fonction génératrice de la suite de nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$ est la série

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k.$$

Exemples : La série de la fonction génératrice de la suite

- $1, 1, 1$ est $1 + x + x^2 = \frac{x^3-1}{x-1}$, (la série est finie si la suite est finie)
- $1, 1, 1, \ldots$ est $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

Université de Montréal

Un peu d'analyse

Dans le cours de calcul ou d'analyse on étudie la convergence de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Supposons que la série converge pour $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, disons que

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

sur $(-\varepsilon, \varepsilon)$ et que $G(x)$ est une fonction analytique (toutes les dérivés de G existent sur $(-\varepsilon, \varepsilon)$). On dit que $G(x)$ est aussi la fonction génératrice de $a_0, a_1, \dots, a_k, \dots$.

La formule de Taylor/Maclaurin donne

$$a_k = \frac{G^{(k)}(0)}{k!}$$

où $G^{(k)}(0)$ est la k-ième dérivée évaluée en $x = 0$.

Fonction génératrice - Exemples

Exemple : La fonction $G(x) = \frac{1}{1-x}$ est la fonction génératrice de la suite $1, 1, 1, 1, \dots$ pour $|x| < 1$, parce que dans ce cas,

$$G(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots .$$

Cette série est appelée série géométrique.

Démonstration :

$$G'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, G''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, G'''(x) = \frac{3!}{(1-x)^4}, \dots$$

$$G^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

(Il faut le prouver par induction.) Donc

$$a_k = \frac{G^{(k)}(0)}{k!} = \frac{k!}{k!} = 1.$$

Fonction génératrice - Exemples

Exemple : Quelle est la fonction génératrice de la suite $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots$?

Réponse : La série de la fonction génératrice est donnée par

$$1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \alpha^3 x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha x)^k = \frac{1}{1 - \alpha x} = G(x),$$

convergente pour $|\alpha x| < 1$.

Fonction génératrice - Exemples

Exemple : Soit $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ et $a_k = C(m, k)$ pour $k = 0, 1, \dots, m$. La fonction génératrice de $a_0, \dots, a_m$ est

$$\begin{aligned} G(x) =& C(m,0) + C(m,1)x + \cdots + C(m,m-1)x^{m-1} + C(m,m)x^m \\ =& (1+x)^m, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le théorème du binôme.

Des propriétés utiles

Théorème : Soient $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ et $H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$. Dans un domaine où les deux séries convergent absolument, on a,

$$G(x) + H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k, \qquad G(x)H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right) x^k.$$

Exemple : Trouver les coefficients de $G(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ si $|x| < 1$.

Réponse : Comme $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ si $|x| < 1$, alors,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} 1 \cdot 1 \right) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k.$$

Des propriétés utiles

Théorème : Soit $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. *Dans un domaine où la série converge absolument, on a,*

$$G'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$$

Exemple : Trouver les coefficients de $F(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ si $|x| < 1$.

Réponse : Comme $G(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ si $|x| < 1$, alors,

$$F(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = G'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k.$$

Fonction génératrice - Exemples

Exemple : Soit m entier positif. Prouver que

$$\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{k=0}^{\infty} C(m+k-1,k)x^k$$

si $|x| < 1$.

Démonstration : Par induction sur m. $P(1)$ est V, car

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} C(1+k-1,k)x^k.$$

Supposons que $P(m)$ est V.

$$\frac{1}{(1-x)^{m+1}} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{(1-x)^m}\right)'$$

Université de Montréal

Fonction génératrice - Exemples

Démonstration (continuation) :

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \implies G'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k \qquad a_k = C(m+k-1,k).$$

$$\frac{1}{(1-x)^{m+1}} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{(1-x)^m}\right)' = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)C(m+(k+1)-1,k+1)x^k$$

Comme

$$\begin{aligned}(k+1)C(m+(k+1)-1,k+1) &= \frac{(k+1)(m+k)!}{(k+1)!(m-1)!} = \frac{(m+k)!}{k!(m-1)!}\\ &= \frac{m(m+k)!}{k!m!} = mC(m+k,k)\end{aligned}$$

Donc $P(m+1)$ est V est l'enonce est V par induction.

Université de Montréal

Application des fonctions génératrices à problèmes de dénombrement

Nous revenons sur le problème de compter les solutions naturelles d'une équation de la forme

$$y_1 + \cdots + y_m = s.$$

Exemple : Trouver le nombre de solutions naturelles de

$$y_1 + y_2 + y_3 = 15,$$

si $2 \leq y_1 \leq 5$, $3 \leq y_2 \leq 6$ et $8 \leq y_3 \leq 9$.

Résolution : Il faut trouver le coefficient de x^{15} dans

$$(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^8 + x^9).$$

Université de Montréal

Application des fonctions génératrices à problèmes de dénombrement

Résolution (continuation) :

$$
\begin{aligned}
&(x^2+x^3+x^4+x^5)(x^3+x^4+x^5+x^6)(x^8+x^9)\\
=&x^2(1+x+x^2+x^3)x^3(1+x+x^2+x^3)x^8(1+x)\\
=&x^{13}(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3)(1+x)\\
=&x^{13}(\text{termes de moins haute degrée } + 5x^2 + \text{ termes de plus haute degrée})
\end{aligned}
$$

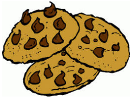
Pour trouver le coefficient on a calculé

$$x^2\cdot 1\cdot 1 + x\cdot x\cdot 1 + x\cdot 1\cdot x + 1\cdot x^2\cdot 1 + 1\cdot x\cdot x.$$

Par conséquent, il y a 5 solutions naturelles avec les conditions demandées.

Application des fonctions génératrices à problèmes de dénombrement

Problème : De combien de façons différentes peut-on distribuer 8 biscuits identiques à trois enfants de manière que chacun reçoive au moins deux biscuits mais pas plus que quatre?



Application des fonctions génératrices à problèmes de dénombrement

Résolution : Il faut résoudre l'équation

$$y_1 + y_2 + y_3 = 8,$$

avec $y_i \in \mathbb{Z}$, $2 \leq y_i \leq 4$. Il faut trouver le coefficient de x^8 dans

$$(x^2 + x^3 + x^4)^3.$$

Nous avons,

$$\begin{aligned}(x^2 + x^3 + x^4)^3 =& x^6(1 + x + x^2)(1 + x + x^2)(1 + x + x^2)\\ =& x^6(\text{termes de moins haute degrée } + 6x^2\\ &+ \text{ termes de plus haute degrée})\end{aligned}$$

Pour trouver le coefficient on a calculé

$$3x^2 \cdot 1 \cdot 1 + 3x \cdot x \cdot 1$$

Par conséquent, il y a 6 façons de distribuer les biscuits.

Application des fonctions génératrices à récurrences

Problème : Résoudre la récurrence suivante

- $a_k = 3a_{k-1}$ pour $k \in \mathbb{Z}_{>0}$,
- $a_0 = 2$.

Résolution : Soit $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Alors,

On a donc

$$xG(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k.$$

$$\begin{aligned} G(x) - 3xG(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - 3\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k - 3\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - 3a_{k-1}) x^k \\ &= 2. \end{aligned}$$

Université de Montréal

Application des fonctions génératrices à récurrences

Résolution (continuation) : Alors,

$$G(x)(1-3x)=2.$$

Par conséquent,

$$G(x)=\frac{2}{1-3x}=2\sum_{k=0}^{\infty}(3x)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(2\cdot 3^k)x^k.$$

On a que $a_k=2\cdot 3^k$.