MAT1500–Mathématiques discrètes

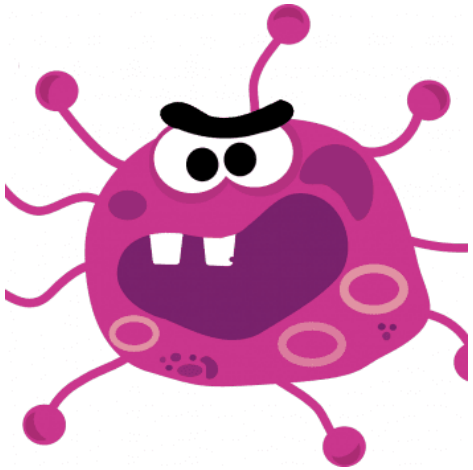
Matilde N. Lalín

Université de Montréal
http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin/mat1500

Le 31 mars 2020

Le menu d'aujourd'hui

- Annonces
- Rappel de 5.2 Solutions des relations de récurrence et 5.4 Principe d'inclusion-exclusion
- 5.5 Applications du principe d'inclusion-exclusion.



Annonces

- Cours théoriques 24 mars - 17 avril
  https://umontreal.zoom.us/j/145155842.

Annonces

- Cours théoriques 24 mars - 17 avril
  https://umontreal.zoom.us/j/145155842.
- Youcef disponible mercredi 13h30-14h30
  https://umontreal.zoom.us/j/7537415921

Annonces

- Cours théoriques 24 mars - 17 avril
  https://umontreal.zoom.us/j/145155842.
- Youcef disponible mercredi 13h30-14h30
  https://umontreal.zoom.us/j/7537415921
- Vladimir disponible/TP jeudi 13h30-15h30
  https://umontreal.zoom.us/j/3611549732

Annonces

- Cours théoriques 24 mars - 17 avril
  https://umontreal.zoom.us/j/145155842.
- Youcef disponible mercredi 13h30-14h30
  https://umontreal.zoom.us/j/7537415921
- Vladimir disponible/TP jeudi 13h30-15h30
  https://umontreal.zoom.us/j/3611549732
- Problèmes de révision sur
  http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin/mat1500

Annonces

- Examen final sur Studium.

Annonces

- Examen final sur Studium.
- Date du final retenue : 24 avril.

Annonces

- Examen final sur Studium.
- Date du final retenue : 24 avril.
- Barème retenue : intra 40%, final 60%.

Annonces

- Examen final sur Studium.
- Date du final retenue : 24 avril.
- Barème retenue : intra 40%, final 60%.
- La date limite pour abandonner le cours : 15 avril.

Annonces

- Examen final sur Studium.
- Date du final retenue : 24 avril.
- Barème retenue : intra 40%, final 60%.
- La date limite pour abandonner le cours : 15 avril.
- Test bidon disponible sur Studium.

Rappel de 5.2 Solutions des relations de récurrence

Une relation de récurrence linéaire homogène de degrée k à coefficients constants (RRLHCC de degré k) est une relation de récurrence de la forme

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},$$

où $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ et $c_k \neq 0$.

Rappel de 5.2 Solutions des relations de récurrence

Une relation de récurrence linéaire homogène de degrée k à coefficients constants (RRLHCC de degré k) est une relation de récurrence de la forme

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},$$

où $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ et $c_k \neq 0$.

- Solution de $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ si $r_1 \neq r_2$ est $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$.

Rappel de 5.2 Solutions des relations de récurrence

Une relation de récurrence linéaire homogène de degrée k à coefficients constants (RRLHCC de degré k) est une relation de récurrence de la forme

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},$$

où $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ et $c_k \neq 0$.

- Solution de $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ si $r_1 \neq r_2$ est $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$.
- Solution de $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ si $r_1 = r_2 =: r_0$ est $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$.

Rappel de 5.2 Solutions des relations de récurrence

Une relation de récurrence linéaire homogène de degrée k à coefficients constants (RRLHCC de degré k) est une relation de récurrence de la forme

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},$$

où $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ et $c_k \neq 0$.

- Solution de $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ si $r_1 \neq r_2$ est $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$.
- Solution de $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ si $r_1 = r_2 =: r_0$ est $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$.
- Solution de $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ si $r_1, \ldots, r_k$ toutes différentes est $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \cdots + \alpha_k r_k^n$.

Rappel de 5.4 Principe d'inclusion-exclusion

Théorème : Soient $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $A_1, \ldots, A_n$ ensembles finis. Alors,

$$\begin{aligned}|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = &\sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &- \cdots \\ &+ (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.\end{aligned}$$

Rappel de 5.4 Principe d'inclusion-exclusion

Théorème : Soient $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $A_1, \ldots, A_n$ ensembles finis. Alors,

$$\begin{aligned}|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = &\sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &- \cdots \\ &+ (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.\end{aligned}$$

Si $n = 3$,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

5.5 Applications du principe d'inclusion-exclusion

Soient U un ensemble fini, $P_1, \ldots P_n$ quelques propriétés et soient

$$A_i = \{x \in U \mid x \text{ a la propriété } P_i\}.$$

5.5 Applications du principe d'inclusion-exclusion

Soient U un ensemble fini, $P_1, \dots P_n$ quelques propriétés et soient

$$A_i = \{x \in U \,|\, x \text{ a la propriété } P_i\}.$$

On défini

$$|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = N(P_{i_1} \dots P_{i_k}),$$
$$|U| = N,$$

5.5 Applications du principe d'inclusion-exclusion

Soient U un ensemble fini, $P_1, \dots P_n$ quelques propriétés et soient

$$A_i = \{x \in U \,|\, x \text{ a la propriété } P_i\}.$$

On défini

$$|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = N(P_{i_1} \dots P_{i_k}),$$

$$|U| = N,$$

et $N(P_1{}' \dots P_n{}')$ le nombre d'éléments de U ne satisfant aucune des propriétés $P_1, \dots, P_n$,

5.5 Applications du principe d'inclusion-exclusion

Soient U un ensemble fini, $P_1, \dots P_n$ quelques propriétés et soient

$$A_i = \{x \in U \mid x \text{ a la propriété } P_i\}.$$

On défini

$$|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = N(P_{i_1} \dots P_{i_k}),$$

$$|U| = N,$$

et $N(P_1{}' \dots P_n{}')$ le nombre d'éléments de U ne satisfant aucune des propriétés $P_1, \dots, P_n$, égal à $N - |A_1 \cup \cdots \cup A_n|$.

5.5 Applications du principe d'inclusion-exclusion

Soient U un ensemble fini, $P_1, \dots P_n$ quelques propriétés et soient

$$A_i = \{x \in U \,|\, x \text{ a la propriété } P_i\}.$$

On défini

$$|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = N(P_{i_1} \dots P_{i_k}),$$
$$|U| = N,$$

et $N(P_1{}' \dots P_n{}')$ le nombre d'éléments de U ne satisfant aucune des propriétés $P_1, \dots, P_n$, égal à $N - |A_1 \cup \cdots \cup A_n|$.
Par le principe de l'inclusion-exclusion,

$$\begin{aligned} N(P_1{}' \dots P_n{}') = & N - \sum_{i=1}^{n} N(P_i) + \sum_{1 \le i < j \le n} N(P_i P_j) \\ & - \sum_{1 \le i < j < k \le n} N(P_i P_j P_k) + \cdots \\ & + (-1)^n N(P_1 \cdots P_n). \end{aligned}$$

Applications du principe d'inclusion-exclusion - Exemple

Problème : Combien de solutions l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 = 13$$

admet-elle, où $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$, $x_1 \leq 5$, $x_2 \leq 4$ et $x_3 \leq 6$?
Résolution :

Applications du principe d'inclusion-exclusion - Exemple

Problème : Combien de solutions l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 = 13$$

admet-elle, où $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$, $x_1 \leq 5$, $x_2 \leq 4$ et $x_3 \leq 6$?
Résolution : Soient

$$P_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_1 + x_2 + x_3 = 13,\ x_1 > 5\}$$

$$P_2 := \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_1 + x_2 + x_3 = 13,\ x_2 > 4\}$$

$$P_3 := \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_1 + x_2 + x_3 = 13,\ x_3 > 6\}$$

Applications du principe d'inclusion-exclusion - Exemple

Résolution (continuation) :

Applications du principe d'inclusion-exclusion - Exemple

Résolution (continuation) :

Alors,

$$N = C(13 + 3 - 1, 13) = 105,$$

Applications du principe d'inclusion-exclusion - Exemple

Résolution (continuation) :
Alors,

$$N = C(13+3-1,13) = 105, \quad N(P_1) = C(7+3-1,7) = 36,$$

$$N(P_2) = C(8+3-1,8) = 45, \quad N(P_3) = C(6+3-1,6) = 28,$$

Applications du principe d'inclusion-exclusion - Exemple

Résolution (continuation) :
Alors,

$$N = C(13+3-1,13) = 105, \quad N(P_1) = C(7+3-1,7) = 36,$$

$$N(P_2) = C(8+3-1,8) = 45, \quad N(P_3) = C(6+3-1,6) = 28,$$

$$N(P_1P_2) = C(2+3-1,2) = 6, \quad N(P_1P_3) = C(0+3-1,0) = 1,$$

$$N(P_2P_3) = C(1+3-1,1) = 3,$$

Applications du principe d'inclusion-exclusion - Exemple

Résolution (continuation) :
Alors,

$$N = C(13+3-1,13) = 105, \quad N(P_1) = C(7+3-1,7) = 36,$$

$$N(P_2) = C(8+3-1,8) = 45, \quad N(P_3) = C(6+3-1,6) = 28,$$

$$N(P_1P_2) = C(2+3-1,2) = 6, \quad N(P_1P_3) = C(0+3-1,0) = 1,$$

$$N(P_2P_3) = C(1+3-1,1) = 3, \quad N(P_1P_2P_3) = 0.$$

Applications du principe d'inclusion-exclusion - Exemple

Résolution (continuation) :
Alors,

$$N = C(13+3-1,13) = 105, \quad N(P_1) = C(7+3-1,7) = 36,$$

$$N(P_2) = C(8+3-1,8) = 45, \quad N(P_3) = C(6+3-1,6) = 28,$$

$$N(P_1P_2) = C(2+3-1,2) = 6, \quad N(P_1P_3) = C(0+3-1,0) = 1,$$

$$N(P_2P_3) = C(1+3-1,1) = 3, \quad N(P_1P_2P_3) = 0.$$

$N(P_1{}'P_2{}'P_3{}') =$

Applications du principe d'inclusion-exclusion - Exemple

Résolution (continuation) :
Alors,

$$N = C(13+3-1,13) = 105, \quad N(P_1) = C(7+3-1,7) = 36,$$

$$N(P_2) = C(8+3-1,8) = 45, \quad N(P_3) = C(6+3-1,6) = 28,$$

$$N(P_1P_2) = C(2+3-1,2) = 6, \quad N(P_1P_3) = C(0+3-1,0) = 1,$$

$$N(P_2P_3) = C(1+3-1,1) = 3, \quad N(P_1P_2P_3) = 0.$$

$N(P_1{}'P_2{}'P_3{}') = 105$

Applications du principe d'inclusion-exclusion - Exemple

Résolution (continuation) :
Alors,

$$N = C(13+3-1,13) = 105, \quad N(P_1) = C(7+3-1,7) = 36,$$

$$N(P_2) = C(8+3-1,8) = 45, \quad N(P_3) = C(6+3-1,6) = 28,$$

$$N(P_1P_2) = C(2+3-1,2) = 6, \quad N(P_1P_3) = C(0+3-1,0) = 1,$$

$$N(P_2P_3) = C(1+3-1,1) = 3, \quad N(P_1P_2P_3) = 0.$$

$N(P_1{}'P_2{}'P_3{}') = 105 - 36 - 45 - 28$

Applications du principe d'inclusion-exclusion - Exemple

Résolution (continuation) :
Alors,

$$N = C(13+3-1,13) = 105, \quad N(P_1) = C(7+3-1,7) = 36,$$

$$N(P_2) = C(8+3-1,8) = 45, \quad N(P_3) = C(6+3-1,6) = 28,$$

$$N(P_1P_2) = C(2+3-1,2) = 6, \quad N(P_1P_3) = C(0+3-1,0) = 1,$$

$$N(P_2P_3) = C(1+3-1,1) = 3, \quad N(P_1P_2P_3) = 0.$$

$$N(P_1{}'P_2{}'P_3{}') = 105 - 36 - 45 - 28 + 6 + 1 + 3$$

Applications du principe d'inclusion-exclusion - Exemple

Résolution (continuation) :
Alors,

$$N = C(13+3-1,13) = 105, \quad N(P_1) = C(7+3-1,7) = 36,$$

$$N(P_2) = C(8+3-1,8) = 45, \quad N(P_3) = C(6+3-1,6) = 28,$$

$$N(P_1P_2) = C(2+3-1,2) = 6, \quad N(P_1P_3) = C(0+3-1,0) = 1,$$

$$N(P_2P_3) = C(1+3-1,1) = 3, \quad N(P_1P_2P_3) = 0.$$

$$N(P_1{}'P_2{}'P_3{}') = 105 - 36 - 45 - 28 + 6 + 1 + 3 - 0$$

Applications du principe d'inclusion-exclusion - Exemple

Résolution (continuation) :
Alors,

$$N = C(13+3-1,13) = 105, \quad N(P_1) = C(7+3-1,7) = 36,$$

$$N(P_2) = C(8+3-1,8) = 45, \quad N(P_3) = C(6+3-1,6) = 28,$$

$$N(P_1P_2) = C(2+3-1,2) = 6, \quad N(P_1P_3) = C(0+3-1,0) = 1,$$

$$N(P_2P_3) = C(1+3-1,1) = 3, \quad N(P_1P_2P_3) = 0.$$

$$N(P_1{}'P_2{}'P_3{}') = 105 - 36 - 45 - 28 + 6 + 1 + 3 - 0 = 6.$$

Applications du principe d'inclusion-exclusion - Exemple

Résolution (continuation) :
Alors,

$$N = C(13+3-1,13) = 105, \quad N(P_1) = C(7+3-1,7) = 36,$$

$$N(P_2) = C(8+3-1,8) = 45, \quad N(P_3) = C(6+3-1,6) = 28,$$

$$N(P_1P_2) = C(2+3-1,2) = 6, \quad N(P_1P_3) = C(0+3-1,0) = 1,$$

$$N(P_2P_3) = C(1+3-1,1) = 3, \quad N(P_1P_2P_3) = 0.$$

$$N(P_1{}'P_2{}'P_3{}') = 105 - 36 - 45 - 28 + 6 + 1 + 3 - 0 = 6.$$

L'équation a 6 solutions avec les conditions demandées.

Autre résolution

Problème : Combien de solutions l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 = 13$$

admet-elle, où $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$, $x_1 \leq 5$, $x_2 \leq 4$ et $x_3 \leq 6$?

Résolution 2 :

Autre résolution

Problème : Combien de solutions l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 = 13$$

admet-elle, où $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$, $x_1 \leq 5$, $x_2 \leq 4$ et $x_3 \leq 6$?

Résolution 2 : Notons que $5 + 4 + 6 = 15$.

Autre résolution

Problème : Combien de solutions l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 = 13$$

admet-elle, où $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$, $x_1 \leq 5$, $x_2 \leq 4$ et $x_3 \leq 6$?

Résolution 2 : Notons que $5 + 4 + 6 = 15$. On peut penser que $x_1 = 5$, $x_2 = 4$ et $x_3 = 6$ et qu'il faut distribuer deux $\ll -1 \gg$.

Autre résolution

Problème : Combien de solutions l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 = 13$$

admet-elle, où $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$, $x_1 \leq 5$, $x_2 \leq 4$ et $x_3 \leq 6$?

Résolution 2 : Notons que $5 + 4 + 6 = 15$. On peut penser que $x_1 = 5$, $x_2 = 4$ et $x_3 = 6$ et qu'il faut distribuer deux $\ll -1 \gg$. Ainsi, il faut distribuer 2 croix parmi 3 places.

Autre résolution

Problème : Combien de solutions l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 = 13$$

admet-elle, où $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$, $x_1 \leq 5$, $x_2 \leq 4$ et $x_3 \leq 6$?

Résolution 2 : Notons que $5 + 4 + 6 = 15$. On peut penser que $x_1 = 5$, $x_2 = 4$ et $x_3 = 6$ et qu'il faut distribuer deux $\ll -1 \gg$. Ainsi, il faut distribuer 2 croix parmi 3 places. On a

$$C(2 + 3 - 1, 2) = \frac{4!}{2!2!} = 6.$$

Autre résolution

Problème : Combien de solutions l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 = 13$$

admet-elle, où $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$, $x_1 \leq 5$, $x_2 \leq 4$ et $x_3 \leq 6$?

Résolution 2 : Notons que $5 + 4 + 6 = 15$. On peut penser que $x_1 = 5$, $x_2 = 4$ et $x_3 = 6$ et qu'il faut distribuer deux $\ll -1 \gg$. Ainsi, il faut distribuer 2 croix parmi 3 places. On a

$$C(2 + 3 - 1, 2) = \frac{4!}{2!2!} = 6.$$

L'équation a 6 solutions avec les conditions demandées.

La crible d'Ératosthène

Problème : Combien y-a-il de nombres premiers ≤ 100?

Résolution :

La crible d'Ératosthène

Problème : Combien y-a-il de nombres premiers ≤ 100?

Résolution : Rappelons qu'un nombre $n \in \mathbb{N}$ est composé si et seulement s'il existe $p \leq \sqrt{n}$, p premier tel que $p \mid n$.

La crible d'Ératosthène

Problème : Combien y-a-il de nombres premiers ≤ 100?

Résolution : Rappelons qu'un nombre $n \in \mathbb{N}$ est composé si et seulement s'il existe $p \leq \sqrt{n}$, p premier tel que $p \mid n$. Alors, $n \in N$, $1 < n \leq 100$ est premier si et seulement si $n = 2, 3, 5, 7$ ou si $2, 3, 5, 7 \nmid n$.

La crible d'Ératosthène

Problème : Combien y-a-il de nombres premiers ≤ 100?

Résolution : Rappelons qu'un nombre $n \in \mathbb{N}$ est composé si et seulement s'il existe $p \leq \sqrt{n}$, p premier tel que $p \mid n$. Alors, $n \in N$, $1 < n \leq 100$ est premier si et seulement si $n = 2, 3, 5, 7$ ou si $2, 3, 5, 7 \nmid n$.
Soit

$$P_\ell = \{n \in \mathbb{N}, 1 < n \leq 100 \,|\, \ell \text{ divise } n\}.$$

La crible d'Ératosthène

Problème : Combien y-a-il de nombres premiers ≤ 100?

Résolution : Rappelons qu'un nombre $n \in \mathbb{N}$ est composé si et seulement s'il existe $p \leq \sqrt{n}$, p premier tel que $p \mid n$. Alors, $n \in N$, $1 < n \leq 100$ est premier si et seulement si $n = 2, 3, 5, 7$ ou si $2, 3, 5, 7 \nmid n$.
Soit

$$P_\ell = \{n \in \mathbb{N}, 1 < n \leq 100 \mid \ell \text{ divise } n\}.$$

Il faut trouver

$$N(P_2' P_3' P_5' P_7').$$

La crible d'Ératosthène

Résolution (continuation) :

$$
\begin{aligned}
N({P_2}'{P_3}'{P_5}'{P_7}') = 99 & - N(P_2) - N(P_3) - N(P_5) - N(P_7) \\
& + N(P_2P_3) + \cdots + N(P_5P_7) \\
& - N(P_2P_3P_5) - N(P_2P_3P_7) - N(P_2P_5P_7) - N(P_3P_5P_7) \\
& + N(P_2P_3P_5P_7)
\end{aligned}
$$

La crible d'Ératosthène

Résolution (continuation) :

$$
\begin{aligned}
N({P_2}'{P_3}'{P_5}'{P_7}') =& 99 - N(P_2) - N(P_3) - N(P_5) - N(P_7) \\
& + N(P_2P_3) + \cdots + N(P_5P_7) \\
& - N(P_2P_3P_5) - N(P_2P_3P_7) - N(P_2P_5P_7) - N(P_3P_5P_7) \\
& + N(P_2P_3P_5P_7) \\
=& 99
\end{aligned}
$$

La crible d'Ératosthène

Résolution (continuation) :

$$
\begin{aligned}
N({P_2}'{P_3}'{P_5}'{P_7}') =& 99 - N(P_2) - N(P_3) - N(P_5) - N(P_7) \\
& + N(P_2P_3) + \cdots + N(P_5P_7) \\
& - N(P_2P_3P_5) - N(P_2P_3P_7) - N(P_2P_5P_7) - N(P_3P_5P_7) \\
& + N(P_2P_3P_5P_7) \\
=& 99 - \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor
\end{aligned}
$$

La crible d'Ératosthène

Résolution (continuation) :

$$
\begin{aligned}
N(P_2{}'P_3{}'P_5{}'P_7{}') =& 99 - N(P_2) - N(P_3) - N(P_5) - N(P_7) \\
& + N(P_2P_3) + \cdots + N(P_5P_7) \\
& - N(P_2P_3P_5) - N(P_2P_3P_7) - N(P_2P_5P_7) - N(P_3P_5P_7) \\
& + N(P_2P_3P_5P_7) \\
=& 99 - \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3} \right\rfloor \\
& + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5 \cdot 7} \right\rfloor
\end{aligned}
$$

La crible d'Ératosthène

Résolution (continuation) :

$$
\begin{aligned}
N(P_2{}'P_3{}'P_5{}'P_7{}') =& 99 - N(P_2) - N(P_3) - N(P_5) - N(P_7) \\
& + N(P_2P_3) + \cdots + N(P_5P_7) \\
& - N(P_2P_3P_5) - N(P_2P_3P_7) - N(P_2P_5P_7) - N(P_3P_5P_7) \\
& + N(P_2P_3P_5P_7) \\
=& 99 - \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 3} \right\rfloor \\
& + \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3\cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3\cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5\cdot 7} \right\rfloor \\
& - \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 3\cdot 5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 3\cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 5\cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3\cdot 5\cdot 7} \right\rfloor
\end{aligned}
$$

La crible d'Ératosthène

Résolution (continuation) :

$$
\begin{aligned}
N(P_2{}'P_3{}'P_5{}'P_7{}') =& 99 - N(P_2) - N(P_3) - N(P_5) - N(P_7) \\
& + N(P_2P_3) + \cdots + N(P_5P_7) \\
& - N(P_2P_3P_5) - N(P_2P_3P_7) - N(P_2P_5P_7) - N(P_3P_5P_7) \\
& + N(P_2P_3P_5P_7) \\
=& 99 - \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 3} \right\rfloor \\
& + \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3\cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3\cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5\cdot 7} \right\rfloor \\
& - \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 3\cdot 5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 3\cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 5\cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3\cdot 5\cdot 7} \right\rfloor \\
& + \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7} \right\rfloor
\end{aligned}
$$

Université de Montréal

La crible d'Ératosthène

Résolution (continuation) :

$$N(P_2{}'P_3{}'P_5{}'P_7{}') = 99$$

La crible d'Ératosthène

Résolution (continuation) :

$$N(P_2{}'P_3{}'P_5{}'P_7{}') = 99 - 50 - 33 - 20 - 14$$

La crible d'Ératosthène

Résolution (continuation) :

$$\begin{aligned} N(P_2{}'P_3{}'P_5{}'P_7{}') = & 99 - 50 - 33 - 20 - 14 \\ & + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 \end{aligned}$$

La crible d'Ératosthène

Résolution (continuation) :

$$\begin{aligned} N({P_2}'{P_3}'{P_5}'{P_7}') = & 99 - 50 - 33 - 20 - 14 \\ & + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 \\ & - 3 - 2 - 1 - 0 \end{aligned}$$

La crible d'Ératosthène

Résolution (continuation) :

$$\begin{aligned} N({P_2}'{P_3}'{P_5}'{P_7}') = & 99 - 50 - 33 - 20 - 14 \\ & + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 \\ & - 3 - 2 - 1 - 0 \\ & + 0 \end{aligned}$$

La crible d'Ératosthène

Résolution (continuation) :

$$
\begin{aligned}
N({P_2}'{P_3}'{P_5}'{P_7}') =& 99 - 50 - 33 - 20 - 14 \\
& + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 \\
& - 3 - 2 - 1 - 0 \\
& + 0 \\
=& 21
\end{aligned}
$$

La crible d'Ératosthène

Résolution (continuation) :

$$\begin{aligned} N({P_2}'{P_3}'{P_5}'{P_7}') =& 99 - 50 - 33 - 20 - 14 \\ & +16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 \\ & -3 - 2 - 1 - 0 \\ & +0 \\ =& 21 \end{aligned}$$

Il faut ajouter les quatre nombres premiers $2 \in P_2, 3 \in P_3, 5 \in P_5, 7 \in P_7$.

La crible d'Ératosthène

Résolution (continuation) :

$$\begin{aligned} N({P_2}'{P_3}'{P_5}'{P_7}') =& 99 - 50 - 33 - 20 - 14 \\ & +16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 \\ & -3 - 2 - 1 - 0 \\ & +0 \\ =& 21 \end{aligned}$$

Il faut ajouter les quatre nombres premiers $2 \in P_2, 3 \in P_3, 5 \in P_5, 7 \in P_7$.
Il y a 25 nombres premiers ≤ 100.

La crible d'Ératosthène

On peut se servir de la crible d'Ératosthène pour trouver les nombres premiers ≤ 100.

$\cancel{1}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

La crible d'Ératosthène

On peut se servir de la crible d'Ératosthène pour trouver les nombres premiers ≤ 100.

$\cancel{1}$	2	3	$\cancel{4}$	5	$\cancel{6}$	7	$\cancel{8}$	9	$\cancel{10}$
11	$\cancel{12}$	13	$\cancel{14}$	15	$\cancel{16}$	17	$\cancel{18}$	19	$\cancel{20}$
21	$\cancel{22}$	23	$\cancel{24}$	25	$\cancel{26}$	27	$\cancel{28}$	29	$\cancel{30}$
31	$\cancel{32}$	33	$\cancel{34}$	35	$\cancel{36}$	37	$\cancel{38}$	39	$\cancel{40}$
41	$\cancel{42}$	43	$\cancel{44}$	45	$\cancel{46}$	47	$\cancel{48}$	49	$\cancel{50}$
51	$\cancel{52}$	53	$\cancel{54}$	55	$\cancel{56}$	57	$\cancel{58}$	59	$\cancel{60}$
61	$\cancel{62}$	63	$\cancel{64}$	65	$\cancel{66}$	67	$\cancel{68}$	69	$\cancel{70}$
71	$\cancel{72}$	73	$\cancel{74}$	75	$\cancel{76}$	77	$\cancel{78}$	79	$\cancel{80}$
81	$\cancel{82}$	83	$\cancel{84}$	85	$\cancel{86}$	87	$\cancel{88}$	89	$\cancel{90}$
91	$\cancel{92}$	93	$\cancel{94}$	95	$\cancel{96}$	97	$\cancel{98}$	99	$\cancel{100}$

La crible d'Ératosthène

On peut se servir de la crible d'Ératosthène pour trouver les nombres premiers ≤ 100.

$\cancel{1}$	2	3	$\cancel{4}$	5	$\cancel{6}$	7	$\cancel{8}$	$\cancel{9}$	$\cancel{10}$
11	$\cancel{12}$	13	$\cancel{14}$	$\cancel{15}$	$\cancel{16}$	17	$\cancel{18}$	19	$\cancel{20}$
$\cancel{21}$	$\cancel{22}$	23	$\cancel{24}$	25	$\cancel{26}$	$\cancel{27}$	$\cancel{28}$	29	$\cancel{30}$
31	$\cancel{32}$	$\cancel{33}$	$\cancel{34}$	35	$\cancel{36}$	37	$\cancel{38}$	$\cancel{39}$	$\cancel{40}$
41	$\cancel{42}$	43	$\cancel{44}$	$\cancel{45}$	$\cancel{46}$	47	$\cancel{48}$	49	$\cancel{50}$
$\cancel{51}$	$\cancel{52}$	53	$\cancel{54}$	55	$\cancel{56}$	$\cancel{57}$	$\cancel{58}$	59	$\cancel{60}$
61	$\cancel{62}$	$\cancel{63}$	$\cancel{64}$	65	$\cancel{66}$	67	$\cancel{68}$	$\cancel{69}$	$\cancel{70}$
71	$\cancel{72}$	73	$\cancel{74}$	$\cancel{75}$	$\cancel{76}$	77	$\cancel{78}$	79	$\cancel{80}$
$\cancel{81}$	$\cancel{82}$	83	$\cancel{84}$	85	$\cancel{86}$	$\cancel{87}$	$\cancel{88}$	89	$\cancel{90}$
91	$\cancel{92}$	$\cancel{93}$	$\cancel{94}$	95	$\cancel{96}$	97	$\cancel{98}$	$\cancel{99}$	$\cancel{100}$

La crible d'Ératosthène

On peut se servir de la crible d'Ératosthène pour trouver les nombres premiers ≤ 100.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

La crible d'Ératosthène

On peut se servir de la crible d'Ératosthène pour trouver les nombres premiers ≤ 100.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Dénombrement de fonctions surjectives

Définition : Une fonction $f : A \to B$ est surjective si et seulement si pour chaque $b \in B$, il y a $a \in A$ tel que $f(a) = b$.

$$\forall b \in B \, \exists a \in A (f(a) = b).$$

Théorème : Soient m et k des nombres entiers positifs avec $m \geq k$. Alors, il y a

$$k^m - C(k,1)(k-1)^m + C(k,2)(k-2)^m - \cdots + (-1)^{k-1} C(k,k-1) 1^m$$

fonctions surjectives d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à k éléments.

Dénombrement de fonctions surjectives

Démonstration : On prouvera qu'il y a

$$k^m - C(k,1)(k-1)^m + C(k,2)(k-2)^m - \cdots + (-1)^{k-1}C(k,k-1)1^m$$

fonctions surjectives d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à k éléments.

Dénombrement de fonctions surjectives

Démonstration : On prouvera qu'il y a

$$k^m - C(k,1)(k-1)^m + C(k,2)(k-2)^m - \cdots + (-1)^{k-1}C(k,k-1)1^m$$

fonctions surjectives d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à k éléments.
Soit

$$P_i = \{f : \{a_1, \ldots, a_m\} \to \{b_1, \ldots, b_k\} \mid b_i \notin \mathrm{Im}(f)\}.$$

On a donc que f est surjective si et seulement si $f \in P'_1 \ldots P'_k$.

Dénombrement de fonctions surjectives

Démonstration : On prouvera qu'il y a

$$k^m - C(k,1)(k-1)^m + C(k,2)(k-2)^m - \cdots + (-1)^{k-1}C(k,k-1)1^m$$

fonctions surjectives d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à k éléments.
Soit

$$P_i = \{f : \{a_1, \ldots, a_m\} \to \{b_1, \ldots, b_k\} \mid b_i \notin \mathrm{Im}(f)\}.$$

On a donc que f est surjective si et seulement si $f \in P'_1 \ldots P'_k$.
Observons que $N = k^m$,

Dénombrement de fonctions surjectives

Démonstration : On prouvera qu'il y a

$$k^m - C(k,1)(k-1)^m + C(k,2)(k-2)^m - \cdots + (-1)^{k-1}C(k,k-1)1^m$$

fonctions surjectives d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à k éléments.
Soit

$$P_i = \{f : \{a_1, \ldots, a_m\} \to \{b_1, \ldots, b_k\} \mid b_i \notin \mathrm{Im}(f)\}.$$

On a donc que f est surjective si et seulement si $f \in P_1' \ldots P_k'$.
Observons que $N = k^m$, $N(P_i) = (k-1)^m$ et il y a $C(k,1)$ termes de ce type,

Dénombrement de fonctions surjectives

Démonstration : On prouvera qu'il y a

$$k^m - C(k,1)(k-1)^m + C(k,2)(k-2)^m - \cdots + (-1)^{k-1}C(k,k-1)1^m$$

fonctions surjectives d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à k éléments.
Soit

$$P_i = \{f : \{a_1, \ldots, a_m\} \to \{b_1, \ldots, b_k\} \mid b_i \notin \mathrm{Im}(f)\}.$$

On a donc que f est surjective si et seulement si $f \in P_1' \ldots P_k'$.
Observons que $N = k^m$, $N(P_i) = (k-1)^m$ et il y a $C(k,1)$ termes de ce type, $N(P_iP_j) = (k-2)^m$ et il y a $C(k,2)$ termes de ce type, ...

Dénombrement de fonctions surjectives

Démonstration : On prouvera qu'il y a

$$k^m - C(k,1)(k-1)^m + C(k,2)(k-2)^m - \cdots + (-1)^{k-1}C(k,k-1)1^m$$

fonctions surjectives d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à k éléments.
Soit

$$P_i = \{f : \{a_1, \ldots, a_m\} \to \{b_1, \ldots, b_k\} \mid b_i \notin \mathrm{Im}(f)\}.$$

On a donc que f est surjective si et seulement si $f \in P'_1 \ldots P'_k$.
Observons que $N = k^m$, $N(P_i) = (k-1)^m$ et il y a $C(k,1)$ termes de ce type, $N(P_iP_j) = (k-2)^m$ et il y a $C(k,2)$ termes de ce type, ...
$N(P_1P_2\cdots\widehat{P_j}\cdots P_k) = 1^m$ (la notation $\widehat{P_j}$ indique qu'il faut enlever le terme) et il y a $C(k,k-1)$ termes de ce type

Dénombrement de fonctions surjectives

Démonstration : On prouvera qu'il y a

$$k^m - C(k,1)(k-1)^m + C(k,2)(k-2)^m - \cdots + (-1)^{k-1}C(k,k-1)1^m$$

fonctions surjectives d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à k éléments.
Soit

$$P_i = \{f : \{a_1, \ldots, a_m\} \to \{b_1, \ldots, b_k\} \mid b_i \notin \mathrm{Im}(f)\}.$$

On a donc que f est surjective si et seulement si $f \in P'_1 \ldots P'_k$.
Observons que $N = k^m$, $N(P_i) = (k-1)^m$ et il y a $C(k,1)$ termes de ce type, $N(P_iP_j) = (k-2)^m$ et il y a $C(k,2)$ termes de ce type, ...
$N(P_1P_2\cdots\widehat{P_j}\cdots P_k) = 1^m$ (la notation $\widehat{P_j}$ indique qu'il faut enlever le terme) et il y a $C(k,k-1)$ termes de ce type et $N(P_1P_2\cdots P_k) = 0$.

Dénombrement de fonctions surjectives

Démonstration : On prouvera qu'il y a

$$k^m - C(k,1)(k-1)^m + C(k,2)(k-2)^m - \cdots + (-1)^{k-1}C(k,k-1)1^m$$

fonctions surjectives d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à k éléments.
Soit

$$P_i = \{f : \{a_1, \ldots, a_m\} \to \{b_1, \ldots, b_k\} \mid b_i \notin \mathrm{Im}(f)\}.$$

On a donc que f est surjective si et seulement si $f \in P_1' \ldots P_k'$.
Observons que $N = k^m$, $N(P_i) = (k-1)^m$ et il y a $C(k,1)$ termes de ce type, $N(P_iP_j) = (k-2)^m$ et il y a $C(k,2)$ termes de ce type, ...
$N(P_1P_2\cdots\widehat{P_j}\cdots P_k) = 1^m$ (la notation $\widehat{P_j}$ indique qu'il faut enlever le terme) et il y a $C(k,k-1)$ termes de ce type et $N(P_1P_2\cdots P_k) = 0$.
En applicant la formule d'inclusion-exclusion, nous obtenons le résultat.

Dénombrement de fonctions surjectives - Exemple

Problème : De combien de façons peut-on attribuer six tâches différentes à quatre employées différents si tous ces employées doivent recevoir au moins une tâche?

Résolution :

Dénombrement de fonctions surjectives - Exemple

Problème : De combien de façons peut-on attribuer six tâches différentes à quatre employées différents si tous ces employées doivent recevoir au moins une tâche?

Résolution : On considère les fonctions $f : \{\text{tâches}\} \to \{\text{employées}\}$.

Dénombrement de fonctions surjectives - Exemple

Problème : De combien de façons peut-on attribuer six tâches différentes à quatre employées différents si tous ces employées doivent recevoir au moins une tâche?

Résolution : On considère les fonctions $f : \{\text{tâches}\} \to \{\text{employées}\}$. Les conditions du problème indiquent que f doit être surjective.

Dénombrement de fonctions surjectives - Exemple

Problème : De combien de façons peut-on attribuer six tâches différentes à quatre employées différents si tous ces employées doivent recevoir au moins une tâche?

Résolution : On considère les fonctions $f : \{\text{tâches}\} \to \{\text{employées}\}$. Les conditions du problème indiquent que f doit être surjective. On a donc

$$4^6 - C(4,1)3^6 + C(4,2)2^6 - C(4,3)1^6$$

□

Dénombrement de fonctions surjectives - Exemple

Problème : De combien de façons peut-on attribuer six tâches différentes à quatre employées différents si tous ces employées doivent recevoir au moins une tâche?

Résolution : On considère les fonctions $f : \{\text{tâches}\} \to \{\text{employées}\}$. Les conditions du problème indiquent que f doit être surjective. On a donc

$$4^6 - C(4,1)3^6 + C(4,2)2^6 - C(4,3)1^6 = 4096 - 2916 + 384 - 6$$

$\square$

Dénombrement de fonctions surjectives - Exemple

Problème : De combien de façons peut-on attribuer six tâches différentes à quatre employées différents si tous ces employées doivent recevoir au moins une tâche?

Résolution : On considère les fonctions $f : \{\text{tâches}\} \to \{\text{employées}\}$. Les conditions du problème indiquent que f doit être surjective. On a donc

$$\begin{aligned} 4^6 - C(4,1)3^6 + C(4,2)2^6 - C(4,3)1^6 &= 4096 - 2916 + 384 - 6 \\ &= 1558 \end{aligned}$$

$\square$

Dérangements - Problème du vestiaire

Problème : Un nouvel employé d'un vestiaire place les manteaux de n clients d'un restaurant en oubliant de mettre un ticket sur les manteaux. Lorsque les clients viennent réclamer leurs manteaux, l'employé du vestiaire remet aléatoirement à chacun un manteaux à partir des manteaux restants. De combien de façons est-il possible qu'aucun des clients ne reçoive son propre manteau?

Dérangements - Problème du vestiaire

Problème : Un nouvel employé d'un vestiaire place les manteaux de n clients d'un restaurant en oubliant de mettre un ticket sur les manteaux. Lorsque les clients viennent réclamer leurs manteaux, l'employé du vestiaire remet aléatoirement à chacun un manteaux à partir des manteaux restants. De combien de façons est-il possible qu'aucun des clients ne reçoive son propre manteau?

Définition : Un dérangement est une permutation d'objets qui ne laisse aucun objet dans sa position originale.

Théorème : Soit D_n le nombre de dérangements de n objets. On a

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Théorème : Soit D_n le nombre de dérangements de n objets. On a

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Observation : La formule ci dessus est reliée au e de la fonction exponentielle

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots \approx 0,368\ldots$$

Dérangements

Démonstration :

Dérangements

Démonstration : Soit

$$P_i = \{\text{permutations dont le } i\text{-ème objet reste à sa position originale}\}.$$

Dérangements

Démonstration : Soit

$$P_i = \{\text{permutations dont le } i\text{-ème objet reste à sa position originale}\}.$$

On a donc que $D_n = N(P'_1 \dots P'_n)$.

Dérangements

Démonstration : Soit

$$P_i = \{\text{permutations dont le } i\text{-ème objet reste à sa position originale}\}.$$

On a donc que $D_n = N(P'_1 \dots P'_n)$.
Observons que $N = n!$, $N(P_i) = (n-1)!$ et il y a $C(n,1)$ termes de ce type,

Dérangements

Démonstration : Soit

$$P_i = \{\text{permutations dont le } i\text{-ème objet reste à sa position originale}\}.$$

On a donc que $D_n = N(P_1' \dots P_n')$.
Observons que $N = n!$, $N(P_i) = (n-1)!$ et il y a $C(n,1)$ termes de ce type, $N(P_iP_j) = (n-2)!$ et il y a $C(n,2)$ termes de ce type, ...

Dérangements

Démonstration : Soit

$$P_i = \{\text{permutations dont le } i\text{-ème objet reste à sa position originale}\}.$$

On a donc que $D_n = N(P_1' \dots P_n')$.
Observons que $N = n!$, $N(P_i) = (n-1)!$ et il y a $C(n,1)$ termes de ce type, $N(P_iP_j) = (n-2)!$ et il y a $C(n,2)$ termes de ce type, ...
$N(P_1P_2 \cdots P_n) = (n-n)! = 0!$ et il y a $C(n,n) = 1$ termes de ce type.

Dérangements

Démonstration : Soit

$$P_i = \{\text{permutations dont le } i\text{-ème objet reste à sa position originale}\}.$$

On a donc que $D_n = N(P_1' \dots P_n')$.
Observons que $N = n!$, $N(P_i) = (n-1)!$ et il y a $C(n,1)$ termes de ce type, $N(P_iP_j) = (n-2)!$ et il y a $C(n,2)$ termes de ce type, ...
$N(P_1P_2 \cdots P_n) = (n-n)! = 0!$ et il y a $C(n,n) = 1$ termes de ce type.
En applicant la formule d'inclusion-exclusion, nous obtenons

$$D_n = n! - C(n,1)(n-1)! + C(n,2)(n-2)! - \cdots + (-1)^n C(n,n)0!$$

Dérangements

Démonstration : Soit

$$P_i = \{\text{permutations dont le } i\text{-ème objet reste à sa position originale}\}.$$

On a donc que $D_n = N(P_1' \dots P_n')$.
Observons que $N = n!$, $N(P_i) = (n-1)!$ et il y a $C(n,1)$ termes de ce type, $N(P_iP_j) = (n-2)!$ et il y a $C(n,2)$ termes de ce type, ...
$N(P_1P_2\cdots P_n) = (n-n)! = 0!$ et il y a $C(n,n) = 1$ termes de ce type.
En applicant la formule d'inclusion-exclusion, nous obtenons

$$\begin{aligned} D_n =& n! - C(n,1)(n-1)! + C(n,2)(n-2)! - \cdots + (-1)^n C(n,n)0! \\ =& n! - \frac{n!}{1!\cancel{(n-1)!}}\cancel{(n-1)!} + \frac{n!}{2!\cancel{(n-2)!}}\cancel{(n-2)!} - \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!\cancel{0!}}\cancel{0!} \end{aligned}$$

Dérangements

Démonstration : Soit

$$P_i = \{\text{permutations dont le } i\text{-ème objet reste à sa position originale}\}.$$

On a donc que $D_n = N(P_1' \dots P_n')$.
Observons que $N = n!$, $N(P_i) = (n-1)!$ et il y a $C(n,1)$ termes de ce type, $N(P_iP_j) = (n-2)!$ et il y a $C(n,2)$ termes de ce type, ...
$N(P_1P_2\cdots P_n) = (n-n)! = 0!$ et il y a $C(n,n) = 1$ termes de ce type.
En applicant la formule d'inclusion-exclusion, nous obtenons

$$\begin{aligned}
D_n =& n! - C(n,1)(n-1)! + C(n,2)(n-2)! - \cdots + (-1)^n C(n,n)0! \\
=& n! - \frac{n!}{1!\cancel{(n-1)!}}\cancel{(n-1)!} + \frac{n!}{2!\cancel{(n-2)!}}\cancel{(n-2)!} - \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!\cancel{0!}}\cancel{0!} \\
=& n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).
\end{aligned}$$