

MAT1500–Mathématiques discrètes

Matilde N. Lalín

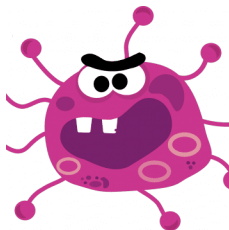
Université de Montréal

<http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin/mat1500>

Le 31 mars 2020

Le menu d'aujourd'hui

- Annonces
- Rappel de 5.2 Solutions des relations de récurrence et 5.4 Principe d'inclusion-exclusion
- 5.5 Applications du principe d'inclusion-exclusion.



Annonces

- Cours théoriques 24 mars - 17 avril
<https://umontreal.zoom.us/j/145155842>.
- Youcef disponible mercredi 13h30-14h30
<https://umontreal.zoom.us/j/7537415921>
- Vladimir disponible/TP jeudi 13h30-15h30
<https://umontreal.zoom.us/j/3611549732>
- Problèmes de révision sur
<http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin/mat1500>

Annonces

- Examen final sur **Studium**.
- Date du final retenue : **24 avril**.
- Barème retenue : **intra 40%, final 60%**.
- La date limite pour abandonner le cours : **15 avril**.
- **Test bidon** disponible sur **Studium**.

Rappel de 5.2 Solutions des relations de récurrence

Une relation de récurrence linéaire homogène de degré k à coefficients constants (RRLHCC de degré k) est une relation de récurrence de la forme

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},$$

où $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ et $c_k \neq 0$.

- Solution de $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ si $r_1 \neq r_2$ est $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$.
- Solution de $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ si $r_1 = r_2 =: r_0$ est $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$.
- Solution de $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ si r_1, \dots, r_k toutes différentes est $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \cdots + \alpha_k r_k^n$.

Rappel de 5.4 Principe d'inclusion-exclusion

Théorème : Soient $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, A_1, \dots, A_n ensembles finis. Alors,

$$\begin{aligned}
 |A_1 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\
 &\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
 &\quad - \dots \\
 &\quad + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|.
 \end{aligned}$$

Si $n = 3$,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

5.5 Applications du principe d'inclusion-exclusion

Soient U un ensemble fini, P_1, \dots, P_n quelques propriétés et soient

$$A_i = \{x \in U \mid x \text{ a la propriété } P_i\}.$$

On défini

$$\begin{aligned} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| &= N(P_{i_1} \dots P_{i_k}), \\ |U| &= N, \end{aligned}$$

et $N(P_1' \dots P_n')$ le nombre d'éléments de U ne satisfaisant aucune des propriétés P_1, \dots, P_n , égal à $N - |A_1 \cup \dots \cup A_n|$.

Par le principe de l'inclusion-exclusion,

$$\begin{aligned} N(P_1' \dots P_n') &= N - \sum_{i=1}^n N(P_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} N(P_i P_j) \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} N(P_i P_j P_k) + \dots \\ &\quad + (-1)^n N(P_1 \dots P_n). \end{aligned}$$

Applications du principe d'inclusion-exclusion - Exemple

Problème : Combien de solutions l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 = 13$$

admet-elle, où $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$, $x_1 \leq 5$, $x_2 \leq 4$ et $x_3 \leq 6$?

Résolution : Soient

$$P_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 13, x_1 > 5\}$$

$$P_2 := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 13, x_2 > 4\}$$

$$P_3 := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 13, x_3 > 6\}$$

Applications du principe d'inclusion-exclusion - Exemple

Résolution (continuation) :

Alors,

$$N = C(13 + 3 - 1, 13) = 105, \quad N(P_1) = C(7 + 3 - 1, 7) = 36,$$

$$N(P_2) = C(8 + 3 - 1, 8) = 45, \quad N(P_3) = C(6 + 3 - 1, 6) = 28,$$

$$N(P_1P_2) = C(2 + 3 - 1, 2) = 6, \quad N(P_1P_3) = C(0 + 3 - 1, 0) = 1,$$

$$N(P_2P_3) = C(1 + 3 - 1, 1) = 3, \quad N(P_1P_2P_3) = 0.$$

$$N(P_1'P_2'P_3') = 105 - 36 - 45 - 28 + 6 + 1 + 3 - 0 = 6.$$

L'équation a 6 solutions avec les conditions demandées.

Autre résolution

Problème : Combien de solutions l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 = 13$$

admet-elle, où $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$, $x_1 \leq 5$, $x_2 \leq 4$ et $x_3 \leq 6$?

Résolution 2 : Notons que $5 + 4 + 6 = 15$. On peut penser que $x_1 = 5$, $x_2 = 4$ et $x_3 = 6$ et qu'il faut distribuer deux $\ll -1 \gg$. Ainsi, il faut distribuer 2 croix parmi 3 places. On a

$$C(2 + 3 - 1, 2) = \frac{4!}{2!2!} = 6.$$

L'équation a 6 solutions avec les conditions demandées.

La crible d'Ératosthène

Problème : Combien y-a-il de **nombre premiers** ≤ 100 ?

Résolution : Rappelons qu'un nombre $n \in \mathbb{N}$ est composé si et seulement s'il existe $p \leq \sqrt{n}$, p premier tel que $p \mid n$. Alors, $n \in \mathbb{N}$, $1 < n \leq 100$ est premier si et seulement si $n = 2, 3, 5, 7$ ou si $2, 3, 5, 7 \nmid n$.

Soit

$$P_\ell = \{n \in \mathbb{N}, 1 < n \leq 100 \mid \ell \text{ divise } n\}.$$

Il faut trouver

$$N(P'_2 P'_3 P'_5 P'_7).$$

La crible d'Ératosthène

Résolution (continuation) :

$$\begin{aligned}
 N(P_2'P_3'P_5'P_7') &= 99 - N(P_2) - N(P_3) - N(P_5) - N(P_7) \\
 &\quad + N(P_2P_3) + \cdots + N(P_5P_7) \\
 &\quad - N(P_2P_3P_5) - N(P_2P_3P_7) - N(P_2P_5P_7) - N(P_3P_5P_7) \\
 &\quad + N(P_2P_3P_5P_7) \\
 &= 99 - \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3} \right\rfloor \\
 &\quad + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5 \cdot 7} \right\rfloor \\
 &\quad - \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor \\
 &\quad + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor
 \end{aligned}$$

La crible d'Ératosthène

Résolution (continuation) :

$$\begin{aligned}
 N(P_2'P_3'P_5'P_7') &= 99 - 50 - 33 - 20 - 14 \\
 &\quad + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 \\
 &\quad - 3 - 2 - 1 - 0 \\
 &\quad + 0 \\
 &= 21
 \end{aligned}$$

Il faut ajouter les quatre nombres premiers $2 \in P_2, 3 \in P_3, 5 \in P_5, 7 \in P_7$.
 Il y a **25** nombres premiers ≤ 100 .

La crible d'Ératosthène

On peut se servir de la crible d'Ératosthène pour trouver les nombres premiers ≤ 100 .

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Dénombrement de fonctions surjectives

Définition : Une fonction $f : A \rightarrow B$ est **surjective** si et seulement si pour chaque $b \in B$, il y a $a \in A$ tel que $f(a) = b$.

$$\forall b \in B \exists a \in A (f(a) = b).$$

Théorème : Soient m et k des nombres entiers positifs avec $m \geq k$. Alors, il y a

$$k^m - C(k, 1)(k - 1)^m + C(k, 2)(k - 2)^m - \dots + (-1)^{k-1} C(k, k - 1)1^m$$

fonctions **surjectives** d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à k éléments.

Dénombrement de fonctions surjectives

Démonstration : On prouvera qu'il y a

$$k^m - C(k, 1)(k - 1)^m + C(k, 2)(k - 2)^m - \dots + (-1)^{k-1} C(k, k - 1)1^m$$

fonctions **surjectives** d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à k éléments.

Soit

$$P_i = \{f : \{a_1, \dots, a_m\} \rightarrow \{b_1, \dots, b_k\} \mid b_i \notin \text{Im}(f)\}.$$

On a donc que f est surjective si et seulement si $f \in P'_1 \dots P'_k$.

Observons que $N = k^m$, $N(P_i) = (k - 1)^m$ et il y a $C(k, 1)$ termes de ce type, $N(P_i P_j) = (k - 2)^m$ et il y a $C(k, 2)$ termes de ce type, ...

$N(P_1 P_2 \dots \widehat{P}_j \dots P_k) = 1^m$ (la notation \widehat{P}_j indique qu'il faut enlever le terme) et il y a $C(k, k - 1)$ termes de ce type et $N(P_1 P_2 \dots P_k) = 0$.

En appliquant la formule d'inclusion-exclusion, nous obtenons le résultat.

Dénombrement de fonctions surjectives - Exemple

Problème : De combien de façons peut-on attribuer six tâches différentes à quatre employées différents si tous ces employées doivent recevoir au moins une tâche?

Résolution : On considère les fonctions $f : \{\text{tâches}\} \rightarrow \{\text{employées}\}$. Les conditions du problème indiquent que f doit être surjective. On a donc

$$\begin{aligned}4^6 - C(4, 1)3^6 + C(4, 2)2^6 - C(4, 3)1^6 &= 4096 - 2916 + 384 - 6 \\ &= 1558\end{aligned}$$



Dérangements - Problème du vestiaire

Problème : Un nouvel employé d'un vestiaire place les manteaux de n clients d'un restaurant en oubliant de mettre un ticket sur les manteaux. Lorsque les clients viennent réclamer leurs manteaux, l'employé du vestiaire remet aléatoirement à chacun un manteaux à partir des manteaux restants. De combien de façons est-il possible qu'aucun des clients ne reçoive son propre manteau?

Définition : Un **dérangement** est une permutation d'objets qui ne laisse aucun objet dans sa position originale.

Théorème : Soit D_n le nombre de dérangements de n objets. On a

$$D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right).$$

Observation : La formule ci dessus est reliée au e de la fonction exponentielle

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots \approx 0,368 \dots$$

Dérangements

Démonstration : Soit

$P_i = \{\text{permutations dont le } i\text{-ème objet reste à sa position originale}\}.$

On a donc que $D_n = N(P'_1 \dots P'_n).$

Observons que $N = n!$, $N(P_i) = (n-1)!$ et il y a $C(n, 1)$ termes de ce type, $N(P_i P_j) = (n-2)!$ et il y a $C(n, 2)$ termes de ce type, ...

$N(P_1 P_2 \dots P_n) = (n-n)! = 0!$ et il y a $C(n, n) = 1$ termes de ce type.

En appliquant la formule d'inclusion-exclusion, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 D_n &= n! - C(n, 1)(n-1)! + C(n, 2)(n-2)! - \dots + (-1)^n C(n, n)0! \\
 &= n! - \frac{n!}{1!(n-1)!} (n-1)! + \frac{n!}{2!(n-2)!} (n-2)! - \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!0!} 0! \\
 &= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right).
 \end{aligned}$$