

MAT1500–Mathématiques discrètes

Matilde N. Lalín

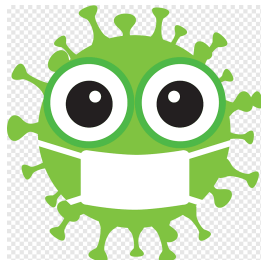
Université de Montréal

<http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin/mat1500>

Le 27 mars 2020

Le menu d'aujourd'hui

- Annonces
- Rappel de 4.6 Permutations et combinaisons généralisés et 5.1 Relations de récurrence
- 5.2 Solutions des relations de récurrence
- 5.4 Principe d'inclusion-exclusion



Annonces

- Cours théoriques 24 mars - 17 avril
<https://umontreal.zoom.us/j/145155842>.

Annonces

- Cours théoriques 24 mars - 17 avril
<https://umontreal.zoom.us/j/145155842>.
- Les diapos se trouvent dans le site web du cours
<http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin/mat1500>

Annonces

- Cours théoriques 24 mars - 17 avril
<https://umontreal.zoom.us/j/145155842>.
- Les diapos se trouvent dans le site web du cours
<http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin/mat1500>
- Enregistrement des cours théoriques disponible sur [Studium](#).

Annonces

- Cours théoriques 24 mars - 17 avril
<https://umontreal.zoom.us/j/145155842>.
- Les diapos se trouvent dans le site web du cours
<http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin/mat1500>
- Enregistrement des cours théoriques disponible sur [Studium](#).
- Youcef disponible mercredi 13h30-14h30
<https://umontreal.zoom.us/j/7537415921>

Annonces

- Cours théoriques 24 mars - 17 avril
<https://umontreal.zoom.us/j/145155842>.
- Les diapos se trouvent dans le site web du cours
<http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin/mat1500>
- Enregistrement des cours théoriques disponible sur Studium.
- Youcef disponible mercredi 13h30-14h30
<https://umontreal.zoom.us/j/7537415921>
- Vladimir disponible/TP jeudi 13h30-15h30
<https://umontreal.zoom.us/j/3611549732>

Annonces

- **Cours théoriques 24 mars - 17 avril**
<https://umontreal.zoom.us/j/145155842>.
- Les **diapos** se trouvent dans le site web du cours
<http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin/mat1500>
- **Enregistrement** des cours théoriques disponible sur **Studium**.
- **Youcef** disponible **mercredi 13h30-14h30**
<https://umontreal.zoom.us/j/7537415921>
- **Vladimir** disponible/TP **jeudi 13h30-15h30**
<https://umontreal.zoom.us/j/3611549732>
- Pages du livre avec **questions des TPs** disponibles sur **Studium**.

Annonces

- Cours théoriques 24 mars - 17 avril
<https://umontreal.zoom.us/j/145155842>.
- Les diapos se trouvent dans le site web du cours
<http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin/mat1500>
- Enregistrement des cours théoriques disponible sur [Studium](#).
- Youcef disponible mercredi 13h30-14h30
<https://umontreal.zoom.us/j/7537415921>
- Vladimir disponible/TP jeudi 13h30-15h30
<https://umontreal.zoom.us/j/3611549732>
- Pages du livre avec questions des TPs disponibles sur [Studium](#).
- Solutionnaires des TPs disponibles sur [Studium](#).

Annonces

- Examen final sur Studium.

Annonces

- Examen final sur Studium.
- Date du final retenue : 24 avril.

Annonces

- Examen final sur Studium.
- Date du final retenue : 24 avril.
- Barème retenue : intra 40%, final 60%.

Annonces

- Examen final sur Studium.
- Date du final retenue : 24 avril.
- Barème retenue : intra 40%, final 60%.
- La date limite pour abandonner le cours : 15 avril.

Annonces

- Examen final sur **Studium**.
- Date du final retenue : **24 avril**.
- Barème retenue : **intra 40%, final 60%**.
- La date limite pour abandonner le cours : **15 avril**.
- **Test bidon** disponible sur **Studium**.

Rappel de 4.6 Permutations et combinaisons généralisés

Théorème : Le nombre de différentes permutations de n objets, où il y a n_1 objets indiscernables de **type 1**, n_2 objets indiscernables de **type 2**, ..., et n_k objets indiscernables de **type k** (où $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$) est

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}.$$

Théorème : Le nombre de façons de distribuer n **objets discernables** dans k **boîtes discernables** de manière telle que n_i objets sont rangés dans la boîte i est égal à

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}.$$

Rappel de 5.1 Relations de récurrence

Une **relation de récurrence** pour la **suite** $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une formule qui exprime a_n en fonction d'un ou de plusieurs termes parmi a_0, a_1, \dots, a_{n-1} , pour tout entier $n \geq n_0$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$.

5.2 Solutions des relations de récurrence

Définition : Une **relation de récurrence linéaire homogène de degré k à coefficients constants** (RRLHCC de degré k) est une relation de récurrence de la forme

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},$$

où $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ et $c_k \neq 0$.

5.2 Solutions des relations de récurrence

Définition : Une **relation de récurrence linéaire homogène de degré k à coefficients constants (RRLHCC de degré k)** est une relation de récurrence de la forme

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},$$

où $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ et $c_k \neq 0$.

Par le principe de l'induction, une telle suite est déterminée de manière **unique** par cette relation et k **conditions initiales**

$$a_0 = d_0, a_1 = d_1, \dots, a_{k-1} = d_{k-1}.$$

La relation de récurrence linéaire homogène de degré k à coefficients constants -Exemples et non-exemples

Exemples

- $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ est une RRLHCC de degré 2.
- $a_n = a_{n-5}$ est une RRLHCC de degré 5.
- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}^2$ n'est pas linéaire.
- $h_n = 2h_{n-1} + 1$ n'est pas homogène.
- $b_n = nb_{n-1}$ n'est pas à coefficients constants.

Stratégie pour les solutions d'une RRLHCC

Si

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},$$

on cherche des solutions de la forme $a_n = r^n$.

Stratégie pour les solutions d'une RRLHCC

Si

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},$$

on cherche des solutions de la forme $a_n = r^n$.

On a

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_k r^{n-k}.$$

Stratégie pour les solutions d'une RRLHCC

Si

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},$$

on cherche des solutions de la forme $a_n = r^n$.

On a

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_k r^{n-k}.$$

En divisant par r^{n-k} et on écrivant tous les termes du même côté,

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_k = 0. \quad (1)$$

Stratégie pour les solutions d'une RRLHCC

Si

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},$$

on cherche des solutions de la forme $a_n = r^n$.

On a

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_k r^{n-k}.$$

En divisant par r^{n-k} et on écrivant tous les termes du même côté,

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_k = 0. \quad (1)$$

Définition : L'équation (1) est dite **équation caractéristique** et ses solutions sont dites **racines caractéristiques**.

Les solutions d'une RRLHCC de degré 2-Premier cas

Théorème : Soient $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ avec $c_2 \neq 0$. Supposons que l'équation caractéristique

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

a deux racines *distinctes* r_1 et r_2 . Alors la suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est solution de la récurrence

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

si et seulement si

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \quad \forall n,$$

où α_1, α_2 sont constantes.

Les solutions d'une RRLHCC de degré 2-Premier cas

Démonstration : (\Leftarrow)

Les solutions d'une RRLHCC de degré 2-Premier cas

Démonstration : (\Leftarrow) Supposons que $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$. Alors,

Les solutions d'une RRLHCC de degré 2-Premier cas

Démonstration : (\Leftarrow) Supposons que $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$. Alors,

$$c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} = c_1 (\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2 (\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2})$$

Les solutions d'une RRLHCC de degré 2-Premier cas

Démonstration : (\Leftarrow) Supposons que $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$. Alors,

$$\begin{aligned}c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} &= c_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) \\ &= \alpha_1(c_1 r_1^{n-1} + c_2 r_1^{n-2}) + \alpha_2(c_1 r_2^{n-1} + c_2 r_2^{n-2})\end{aligned}$$

Les solutions d'une RRLHCC de degré 2-Premier cas

Démonstration : (\Leftarrow) Supposons que $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$. Alors,

$$\begin{aligned} c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} &= c_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) \\ &= \alpha_1(c_1 r_1^{n-1} + c_2 r_1^{n-2}) + \alpha_2(c_1 r_2^{n-1} + c_2 r_2^{n-2}) \\ &= \alpha_1 r_1^{n-2}(c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(c_1 r_2 + c_2) \end{aligned}$$

Les solutions d'une RRLHCC de degré 2-Premier cas

Démonstration : (\Leftarrow) Supposons que $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$. Alors,

$$\begin{aligned}
 c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} &= c_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) \\
 &= \alpha_1(c_1 r_1^{n-1} + c_2 r_1^{n-2}) + \alpha_2(c_1 r_2^{n-1} + c_2 r_2^{n-2}) \\
 &= \alpha_1 r_1^{n-2}(c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(c_1 r_2 + c_2) \\
 &= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n
 \end{aligned}$$

Les solutions d'une RRLHCC de degré 2-Premier cas

Démonstration : (\Leftarrow) Supposons que $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$. Alors,

$$\begin{aligned}
 c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} &= c_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) \\
 &= \alpha_1(c_1 r_1^{n-1} + c_2 r_1^{n-2}) + \alpha_2(c_1 r_2^{n-1} + c_2 r_2^{n-2}) \\
 &= \alpha_1 r_1^{n-2}(c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(c_1 r_2 + c_2) \\
 &= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \\
 &= a_n,
 \end{aligned}$$

Les solutions d'une RRLHCC de degré 2-Premier cas

Démonstration : (\Leftarrow) Supposons que $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$. Alors,

$$\begin{aligned}
 c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} &= c_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) \\
 &= \alpha_1(c_1 r_1^{n-1} + c_2 r_1^{n-2}) + \alpha_2(c_1 r_2^{n-1} + c_2 r_2^{n-2}) \\
 &= \alpha_1 r_1^{n-2}(c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(c_1 r_2 + c_2) \\
 &= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \\
 &= a_n,
 \end{aligned}$$

où nous avons utilisé que $r_1^2 = c_1 r_1 + c_2$ et que $r_2^2 = c_1 r_2 + c_2$.

Les solutions d'une RRLHCC de degré 2-Premier cas

Démonstration : (\implies)

Les solutions d'une RRLHCC de degré 2-Premier cas

Démonstration : (\implies) Maintenant supposons que $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ avec $a_0 = d_0$ et $a_1 = d_1$.

Les solutions d'une RRLHCC de degré 2-Premier cas

Démonstration : (\implies) Maintenant supposons que $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ avec $a_0 = d_0$ et $a_1 = d_1$.

On résoudre

$$\begin{cases} d_0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ d_1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \end{cases}$$

Les solutions d'une RRLHCC de degré 2-Premier cas

Démonstration : (\implies) Maintenant supposons que $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ avec $a_0 = d_0$ et $a_1 = d_1$.

On résout

$$\begin{cases} d_0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ d_1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \end{cases}$$

On a

$$\alpha_1 = \frac{d_1 - d_0 r_2}{r_1 - r_2}, \quad \alpha_2 = \frac{d_0 r_1 - d_1}{r_1 - r_2}.$$

Les solutions d'une RRLHCC de degré 2-Premier cas

Démonstration : (\implies) Maintenant supposons que $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ avec $a_0 = d_0$ et $a_1 = d_1$.

On résoudre

$$\begin{cases} d_0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ d_1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \end{cases}$$

On a

$$\alpha_1 = \frac{d_1 - d_0 r_2}{r_1 - r_2}, \quad \alpha_2 = \frac{d_0 r_1 - d_1}{r_1 - r_2}.$$

Avec ces valeurs pour α_1, α_2 , la suite donnée par $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ satisfait les deux conditions initiales et la relation de récurrence.

Les solutions d'une RRLHCC de degré 2-Premier cas

Démonstration : (\implies) Maintenant supposons que $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ avec $a_0 = d_0$ et $a_1 = d_1$.

On résout

$$\begin{cases} d_0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ d_1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \end{cases}$$

On a

$$\alpha_1 = \frac{d_1 - d_0 r_2}{r_1 - r_2}, \quad \alpha_2 = \frac{d_0 r_1 - d_1}{r_1 - r_2}.$$

Avec ces valeurs pour α_1, α_2 , la suite donnée par $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ satisfait les deux conditions initiales et la relation de récurrence.

L'unicité provient du principe de l'induction. □

Les solutions d'une RRLHCC de degré 2-Exemple

Exemple : Quelle est la solution de

- $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$
- $a_0 = 1, a_1 = 8$?

Résolution :

Les solutions d'une RRLHCC de degré 2-Exemple

Exemple : Quelle est la solution de

- $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$
- $a_0 = 1, a_1 = 8$?

Résolution : L'équation caractéristique est

$$r^2 - r - 2 = 0$$

Les solutions d'une RRLHCC de degré 2-Exemple

Exemple : Quelle est la solution de

- $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$
- $a_0 = 1, a_1 = 8$?

Résolution : L'équation caractéristique est

$$r^2 - r - 2 = 0$$

et ses racines sont $r_1 = 2, r_2 = -1$.

Les solutions d'une RRLHCC de degré 2-Exemple

Exemple : Quelle est la solution de

- $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$
- $a_0 = 1, a_1 = 8$?

Résolution : L'équation caractéristique est

$$r^2 - r - 2 = 0$$

et ses racines sont $r_1 = 2, r_2 = -1$. Il faut résoudre

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 8 = \alpha_1 2 + \alpha_2 (-1) \end{cases}$$

Les solutions d'une RRLHCC de degré 2-Exemple

Exemple : Quelle est la solution de

- $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$
- $a_0 = 1, a_1 = 8$?

Résolution : L'équation caractéristique est

$$r^2 - r - 2 = 0$$

et ses racines sont $r_1 = 2, r_2 = -1$. Il faut résoudre

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 8 = \alpha_1 2 + \alpha_2 (-1) \end{cases}$$

La somme donne $9 = 3\alpha_1 \implies \alpha_1 = 3$.

Les solutions d'une RRLHCC de degré 2-Exemple

Exemple : Quelle est la solution de

- $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$
- $a_0 = 1, a_1 = 8$?

Résolution : L'équation caractéristique est

$$r^2 - r - 2 = 0$$

et ses racines sont $r_1 = 2, r_2 = -1$. Il faut résoudre

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 8 = \alpha_1 2 + \alpha_2(-1) \end{cases}$$

La somme donne $9 = 3\alpha_1 \implies \alpha_1 = 3$. On remplace la valeur de α_1 dans n'importe quelle équation pour obtenir $\alpha_2 = -2$.

Les solutions d'une RRLHCC de degré 2-Exemple

Exemple : Quelle est la solution de

- $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$
- $a_0 = 1, a_1 = 8$?

Résolution : L'équation caractéristique est

$$r^2 - r - 2 = 0$$

et ses racines sont $r_1 = 2, r_2 = -1$. Il faut résoudre

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 8 = \alpha_1 2 + \alpha_2 (-1) \end{cases}$$

La somme donne $9 = 3\alpha_1 \implies \alpha_1 = 3$. On remplace la valeur de α_1 dans n'importe quelle équation pour obtenir $\alpha_2 = -2$. On a donc

$$a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot (-1)^n.$$

La suite de Fibonacci

Rappelons que

- $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pour $n \geq 2$.
- $f_0 = 0, f_1 = 1$

La suite de Fibonacci

Rappelons que

- $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pour $n \geq 2$.
- $f_0 = 0, f_1 = 1$

On suivant la même méthode, on trouve,

$$r^2 - r - 1 = 0, \quad r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

La suite de Fibonacci

Rappelons que

- $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pour $n \geq 2$.
- $f_0 = 0, f_1 = 1$

On suivant la même méthode, on trouve,

$$r^2 - r - 1 = 0, \quad r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 = \alpha_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + \alpha_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \end{cases}$$

La suite de Fibonacci

Rappelons que

- $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pour $n \geq 2$.
- $f_0 = 0, f_1 = 1$

On suivant la même méthode, on trouve,

$$r^2 - r - 1 = 0, \quad r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 = \alpha_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + \alpha_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \end{cases} \implies \begin{cases} 0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right) (\alpha_1 - \alpha_2) \end{cases}$$

La suite de Fibonacci

Rappelons que

- $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pour $n \geq 2$.
- $f_0 = 0, f_1 = 1$

On suivant la même méthode, on trouve,

$$r^2 - r - 1 = 0, \quad r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 = \alpha_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + \alpha_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \end{cases} \implies \begin{cases} 0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right) (\alpha_1 - \alpha_2) \end{cases}$$

$$\implies \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

La suite de Fibonacci

Rappelons que

- $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pour $n \geq 2$.
- $f_0 = 0, f_1 = 1$

On suivant la même méthode, on trouve,

$$r^2 - r - 1 = 0, \quad r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 = \alpha_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + \alpha_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \end{cases} \implies \begin{cases} 0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right) (\alpha_1 - \alpha_2) \end{cases}$$

$$\implies \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\implies f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Les solutions d'une RRLHCC de degré 2-Deuxième cas

Théorème : Soient $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ avec $c_2 \neq 0$. Supposons que l'équation caractéristique

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

a une racine double r_0 . Alors la suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est solution de la récurrence

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

si et seulement si

$$a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n \quad \forall n,$$

où α_1, α_2 sont constantes.

Les solutions d'une RRLHCC de degré 2-Exemple

Exemple : Quelle est la solution de

- $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$
- $a_0 = 2, a_1 = 9$?

Résolution :

Les solutions d'une RRLHCC de degré 2-Exemple

Exemple : Quelle est la solution de

- $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$
- $a_0 = 2, a_1 = 9$?

Résolution : On suivant la même méthode, on trouve,

$$r^2 - 6r + 9 = 0, \quad r_0 = 3 \quad \text{racine double.}$$

Les solutions d'une RRLHCC de degré 2-Exemple

Exemple : Quelle est la solution de

- $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$
- $a_0 = 2, a_1 = 9$?

Résolution : On suit la même méthode, on trouve,

$$r^2 - 6r + 9 = 0, \quad r_0 = 3 \quad \text{racine double.}$$

$$\begin{cases} 2 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 0 \\ 9 = \alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 1 \cdot 3 \end{cases}$$

Les solutions d'une RRLHCC de degré 2-Exemple

Exemple : Quelle est la solution de

- $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$
- $a_0 = 2, a_1 = 9$?

Résolution : On suivant la même méthode, on trouve,

$$r^2 - 6r + 9 = 0, \quad r_0 = 3 \quad \text{racine double.}$$

$$\begin{cases} 2 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 0 \\ 9 = \alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 1 \cdot 3 \end{cases}$$

$$\implies \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.$$

Les solutions d'une RRLHCC de degré 2-Exemple

Exemple : Quelle est la solution de

- $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$
- $a_0 = 2, a_1 = 9$?

Résolution : On suivant la même méthode, on trouve,

$$r^2 - 6r + 9 = 0, \quad r_0 = 3 \quad \text{racine double.}$$

$$\begin{cases} 2 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 0 \\ 9 = \alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 1 \cdot 3 \end{cases}$$

$$\implies \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.$$

$$\implies a_n = 2 \cdot 3^n + n3^n = (n + 2)3^n.$$

Les solutions d'une RRLHCC de degré k -Premier cas

Théorème : Soient $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ avec $c_k \neq 0$. Supposons que l'équation caractéristique

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_k = 0$$

a k racines *distinctes deux à deux* r_1, r_2, \dots, r_k . Alors la suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est solution de la récurrence

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

si et seulement si

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \dots + \alpha_k r_k^n \quad \forall n,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont constantes.

Les solutions d'une RRLHCC de degré k -Premier cas

Théorème : Soient $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ avec $c_k \neq 0$. Supposons que l'équation caractéristique

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_k = 0$$

a k racines *distinctes deux à deux* r_1, r_2, \dots, r_k . Alors la suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est solution de la récurrence

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

si et seulement si

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \dots + \alpha_k r_k^n \quad \forall n,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont constantes.

Observation : La version la plus générale du théorème précédent inclut des multiplicités sur quelques racines.

Les solutions d'une RRLHCC de degré k -Exemple

Exemple : Quelle est la solution de

- $a_n = 7a_{n-1} - 14a_{n-2} + 8a_{n-3}$
- $a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 15$?

Résolution :

Les solutions d'une RRLHCC de degré k -Exemple

Exemple : Quelle est la solution de

- $a_n = 7a_{n-1} - 14a_{n-2} + 8a_{n-3}$
- $a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 15$?

Résolution : On suivant la même méthode, on trouve,

$$r^3 - 7r^2 + 14r - 8 = 0, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = 4.$$

Les solutions d'une RRLHCC de degré k -Exemple

Exemple : Quelle est la solution de

- $a_n = 7a_{n-1} - 14a_{n-2} + 8a_{n-3}$
- $a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 15$?

Résolution : On suivant la même méthode, on trouve,

$$r^3 - 7r^2 + 14r - 8 = 0, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = 4.$$

$$\begin{cases} 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 5 = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 4 \\ 15 = \alpha_1 \cdot 1^2 + \alpha_2 \cdot 2^2 + \alpha_3 \cdot 4^2 \end{cases}$$

Les solutions d'une RRLHCC de degré k -Exemple

Exemple : Quelle est la solution de

- $a_n = 7a_{n-1} - 14a_{n-2} + 8a_{n-3}$
- $a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 15$?

Résolution : On suivant la même méthode, on trouve,

$$r^3 - 7r^2 + 14r - 8 = 0, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = 4.$$

$$\begin{cases} 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 5 = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 4 \\ 15 = \alpha_1 \cdot 1^2 + \alpha_2 \cdot 2^2 + \alpha_3 \cdot 4^2 \end{cases} \implies \begin{cases} 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 3 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ 13 = \alpha_2 \cdot 3 + \alpha_3 \cdot 15 \end{cases}$$

Les solutions d'une RRLHCC de degré k -Exemple

Exemple : Quelle est la solution de

- $a_n = 7a_{n-1} - 14a_{n-2} + 8a_{n-3}$
- $a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 15$?

Résolution : On suivant la même méthode, on trouve,

$$r^3 - 7r^2 + 14r - 8 = 0, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = 4.$$

$$\begin{cases} 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 5 = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 4 \\ 15 = \alpha_1 \cdot 1^2 + \alpha_2 \cdot 2^2 + \alpha_3 \cdot 4^2 \end{cases} \implies \begin{cases} 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 3 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ 13 = \alpha_2 \cdot 3 + \alpha_3 \cdot 15 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 3 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ 4 = \alpha_3 \cdot 6 \end{cases}$$

Les solutions d'une RRLHCC de degré k -Exemple

Exemple : Quelle est la solution de

- $a_n = 7a_{n-1} - 14a_{n-2} + 8a_{n-3}$
- $a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 15$?

Résolution :

$$\begin{cases} 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 5 = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 4 \\ 15 = \alpha_1 \cdot 1^2 + \alpha_2 \cdot 2^2 + \alpha_3 \cdot 4^2 \end{cases} \implies \begin{cases} 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 3 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ 13 = \alpha_2 \cdot 3 + \alpha_3 \cdot 15 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 3 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ 4 = \alpha_3 \cdot 6 \end{cases} \implies \alpha_1 = \frac{1}{3}, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = \frac{2}{3}$$

Les solutions d'une RRLHCC de degré k -Exemple

Exemple : Quelle est la solution de

- $a_n = 7a_{n-1} - 14a_{n-2} + 8a_{n-3}$
- $a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 15$?

Résolution :

$$\begin{cases} 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 5 = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 4 \\ 15 = \alpha_1 \cdot 1^2 + \alpha_2 \cdot 2^2 + \alpha_3 \cdot 4^2 \end{cases} \implies \begin{cases} 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 3 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ 13 = \alpha_2 \cdot 3 + \alpha_3 \cdot 15 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 3 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ 4 = \alpha_3 \cdot 6 \end{cases} \implies \alpha_1 = \frac{1}{3}, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = \frac{2}{3}$$

$$\implies a_n = \frac{1}{3} + 2^n + \frac{2}{3}4^n.$$

5.4 Principe d'inclusion-exclusion

Théorème : Soient A et B deux ensembles finis. Alors,

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|.$$

5.4 Principe d'inclusion-exclusion

Théorème : Soient A et B deux ensembles finis. Alors,

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|.$$

Problème : Une classe de mathématiques discrètes comprend 200 étudiants en **mathématiques**, 150 étudiants en **informatique**, et 110 étudiants **à la fois en mathématiques et en informatique**.

Combien y a-t-il d'étudiants dans cette classe si tout étudiant est inscrit à au moins une discipline ?

5.4 Principe d'inclusion-exclusion

Théorème : Soient A et B deux ensembles finis. Alors,

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|.$$

Problème : Une classe de mathématiques discrètes comprend 200 étudiants en **mathématiques**, 150 étudiants en **informatique**, et 110 étudiants **à la fois en mathématiques et en informatique**.

Combien y a-t-il d'étudiants dans cette classe si tout étudiant est inscrit à au moins une discipline ?

Résolution : Soient

$$M = \{\text{étudiants en mathématiques}\}$$

$$I = \{\text{étudiants en informatique}\}$$

5.4 Principe d'inclusion-exclusion

Théorème : Soient A et B deux ensembles finis. Alors,

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|.$$

Problème : Une classe de mathématiques discrètes comprend 200 étudiants en **mathématiques**, 150 étudiants en **informatique**, et 110 étudiants **à la fois en mathématiques et en informatique**.

Combien y a-t-il d'étudiants dans cette classe si tout étudiant est inscrit à au moins une discipline ?

Résolution : Soient

$$M = \{\text{étudiants en mathématiques}\}$$

$$I = \{\text{étudiants en informatique}\}$$

Nous avons $|M| = 200$, $|I| = 150$, $|M \cap I| = 110$.

5.4 Principe d'inclusion-exclusion

Théorème : Soient A et B deux ensembles finis. Alors,

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|.$$

Problème : Une classe de mathématiques discrètes comprend 200 étudiants en **mathématiques**, 150 étudiants en **informatique**, et 110 étudiants **à la fois en mathématiques et en informatique**.

Combien y a-t-il d'étudiants dans cette classe si tout étudiant est inscrit à au moins une discipline ?

Résolution : Soient

$$M = \{\text{étudiants en mathématiques}\}$$

$$I = \{\text{étudiants en informatique}\}$$

Nous avons $|M| = 200$, $|I| = 150$, $|M \cap I| = 110$. Alors

$$|\{\text{étudiants}\}| = |M \cup I| = |M| + |I| - |M \cap I| = 200 + 150 - 110 = 240.$$

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé

Théorème : Soient $n \in \mathbb{Z}_0$, A_1, \dots, A_n ensembles finis. Alors,

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \left| \bigcap_{j=1}^r A_{i_j} \right|.$$

Avec la notation un peu plus simple,

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &- \dots \\ &+ (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé - cas $n = 3$

Théorème : Soient A, B, C ensembles finis. Alors,

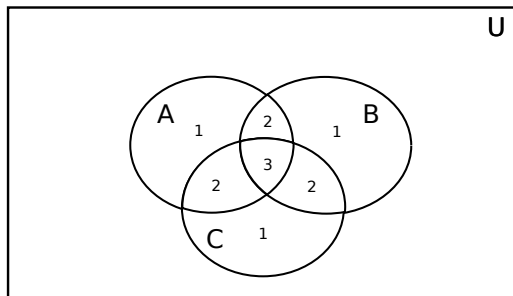
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé - cas $n = 3$

Théorème : Soient A, B, C ensembles finis. Alors,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A| + |B| + |C|$$

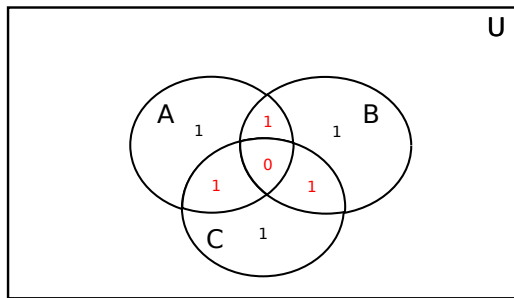


Principe de l'inclusion-exclusion généralisé - cas $n = 3$

Théorème : Soient A, B, C ensembles finis. Alors,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C|$$

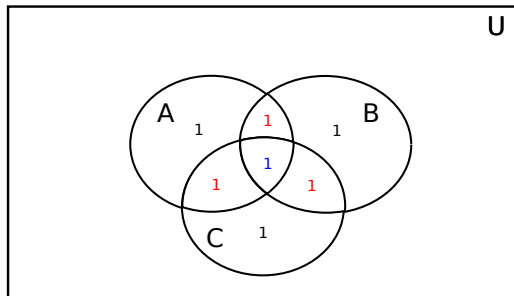


Principe de l'inclusion-exclusion généralisé - cas $n = 3$

Théorème : Soient A, B, C ensembles finis. Alors,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



Principe de l'inclusion-exclusion généralisé

Démonstration :

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé

Démonstration : Soit a un élément qui appartient à exactement r des ensembles A_1, \dots, A_n .

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé

Démonstration : Soit a un élément qui appartient à exactement r des ensembles A_1, \dots, A_n . a est dénombré

- $r = C(r, 1)$ fois par $\sum |A_i|$,

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé

Démonstration : Soit a un élément qui appartient à exactement r des ensembles A_1, \dots, A_n . a est dénombré

- $r = C(r, 1)$ fois par $\sum |A_i|$,
- $C(r, 2)$ fois par $\sum |A_i \cap A_j|$,

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé

Démonstration : Soit a un élément qui appartient à exactement r des ensembles A_1, \dots, A_n . a est dénombré

- $r = C(r, 1)$ fois par $\sum |A_i|$,
- $C(r, 2)$ fois par $\sum |A_i \cap A_j|$,
- $C(r, 3)$ fois par $\sum |A_i \cap A_j \cap A_k|$,

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé

Démonstration : Soit a un élément qui appartient à exactement r des ensembles A_1, \dots, A_n . a est dénombré

- $r = C(r, 1)$ fois par $\sum |A_i|$,
- $C(r, 2)$ fois par $\sum |A_i \cap A_j|$,
- $C(r, 3)$ fois par $\sum |A_i \cap A_j \cap A_k|$,
- $C(r, m)$ fois par $\sum |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}|$ si $m \leq r$ et 0 si $m > r$.

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé

Démonstration : Soit a un élément qui appartient à exactement r des ensembles A_1, \dots, A_n . a est dénombré

- $C(r, 1)$ fois par $\sum |A_i|$,
- $C(r, 2)$ fois par $\sum |A_i \cap A_j|$,
- $C(r, 3)$ fois par $\sum |A_i \cap A_j \cap A_k|$,
- $C(r, m)$ fois par $\sum |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}|$ si $m \leq r$ et 0 si $m > r$.

Par conséquent, a est dénombré

$$C(r, 1) - C(r, 2) + C(r, 3) - \dots + (-1)^{r+1} C(r, r) = \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} C(r, k)$$

fois.

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé

Démonstration : Soit a un élément qui appartient à exactement r des ensembles A_1, \dots, A_n . a est dénombré

- $r = C(r, 1)$ fois par $\sum |A_i|$,
- $C(r, 2)$ fois par $\sum |A_i \cap A_j|$,
- $C(r, 3)$ fois par $\sum |A_i \cap A_j \cap A_k|$,
- $C(r, m)$ fois par $\sum |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}|$ si $m \leq r$ et 0 si $m > r$.

Par conséquent, a est dénombré

$$C(r, 1) - C(r, 2) + C(r, 3) - \dots + (-1)^{r+1} C(r, r) = \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} C(r, k)$$

fois. Comme

$$\sum_{k=0}^r (-1)^k C(r, k) = 0,$$

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé

Démonstration : Soit a un élément qui appartient à exactement r des ensembles A_1, \dots, A_n . a est dénombré

- $r = C(r, 1)$ fois par $\sum |A_i|$,
- $C(r, 2)$ fois par $\sum |A_i \cap A_j|$,
- $C(r, 3)$ fois par $\sum |A_i \cap A_j \cap A_k|$,
- $C(r, m)$ fois par $\sum |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}|$ si $m \leq r$ et 0 si $m > r$.

Par conséquent, a est dénombré

$$C(r, 1) - C(r, 2) + C(r, 3) - \dots + (-1)^{r+1} C(r, r) = \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} C(r, k)$$

fois. Comme

$$\sum_{k=0}^r (-1)^k C(r, k) = 0,$$

on conclut que a est dénombré exactement une fois.

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé - Exemple

Problème : Combien existe-t-il de nombres entiers positifs qui n'excèdent pas 2000 et qui sont divisibles par 7, par 11, ou par 13?

Résolution :

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé - Exemple

Problème : Combien existe-t-il de nombres entiers positifs qui n'excèdent pas 2000 et qui sont divisibles par 7, par 11, ou par 13?

Résolution : Soient

$$A_7 = \{1 \leq n \leq 2000 \mid 7 \text{ divise } n\}$$

$$A_{11} = \{1 \leq n \leq 2000 \mid 11 \text{ divise } n\}$$

$$A_{13} = \{1 \leq n \leq 2000 \mid 13 \text{ divise } n\}$$

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé - Exemple

Problème : Combien existe-t-il de nombres entiers positifs qui n'excèdent pas 2000 et qui sont divisibles par 7, par 11, ou par 13?

Résolution : Soient

$$A_7 = \{1 \leq n \leq 2000 \mid 7 \text{ divise } n\}$$

$$A_{11} = \{1 \leq n \leq 2000 \mid 11 \text{ divise } n\}$$

$$A_{13} = \{1 \leq n \leq 2000 \mid 13 \text{ divise } n\}$$

Observons que

$$A_b \cap A_c = \{1 \leq n \leq 2000 \mid b, c \text{ divise } n\}$$

$$= \{1 \leq n \leq 2000 \mid \text{ppcm}(b, c) \text{ divise } n\}$$

$$= A_{\text{ppcm}(b,c)}$$

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé - Exemple

Résolution (continuation) :

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé - Exemple

Résolution (continuation) : On a

$$|A_7| = \left\lfloor \frac{2000}{7} \right\rfloor = 285, \quad |A_{11}| = \left\lfloor \frac{2000}{11} \right\rfloor = 181, \quad |A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{13} \right\rfloor = 153,$$

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé - Exemple

Résolution (continuation) : On a

$$|A_7| = \left\lfloor \frac{2000}{7} \right\rfloor = 285, \quad |A_{11}| = \left\lfloor \frac{2000}{11} \right\rfloor = 181, \quad |A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{13} \right\rfloor = 153,$$

$$|A_7 \cap A_{11}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 11} \right\rfloor = 25, \quad |A_7 \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 13} \right\rfloor = 21,$$

$$|A_{11} \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{11 \cdot 13} \right\rfloor = 13,$$

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé - Exemple

Résolution (continuation) : On a

$$|A_7| = \left\lfloor \frac{2000}{7} \right\rfloor = 285, \quad |A_{11}| = \left\lfloor \frac{2000}{11} \right\rfloor = 181, \quad |A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{13} \right\rfloor = 153,$$

$$|A_7 \cap A_{11}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 11} \right\rfloor = 25, \quad |A_7 \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 13} \right\rfloor = 21,$$

$$|A_{11} \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{11 \cdot 13} \right\rfloor = 13, \quad |A_7 \cap A_{11} \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 11 \cdot 13} \right\rfloor = 1.$$

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé - Exemple

Résolution (continuation) : On a

$$|A_7| = \left\lfloor \frac{2000}{7} \right\rfloor = 285, \quad |A_{11}| = \left\lfloor \frac{2000}{11} \right\rfloor = 181, \quad |A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{13} \right\rfloor = 153,$$

$$|A_7 \cap A_{11}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 11} \right\rfloor = 25, \quad |A_7 \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 13} \right\rfloor = 21,$$

$$|A_{11} \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{11 \cdot 13} \right\rfloor = 13, \quad |A_7 \cap A_{11} \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 11 \cdot 13} \right\rfloor = 1.$$

$$|A_7 \cup A_{11} \cup A_{13}| =$$

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé - Exemple

Résolution (continuation) : On a

$$|A_7| = \left\lfloor \frac{2000}{7} \right\rfloor = 285, \quad |A_{11}| = \left\lfloor \frac{2000}{11} \right\rfloor = 181, \quad |A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{13} \right\rfloor = 153,$$

$$|A_7 \cap A_{11}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 11} \right\rfloor = 25, \quad |A_7 \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 13} \right\rfloor = 21,$$

$$|A_{11} \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{11 \cdot 13} \right\rfloor = 13, \quad |A_7 \cap A_{11} \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 11 \cdot 13} \right\rfloor = 1.$$

$$|A_7 \cup A_{11} \cup A_{13}| = |A_7| + |A_{11}| + |A_{13}|$$

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé - Exemple

Résolution (continuation) : On a

$$|A_7| = \left\lfloor \frac{2000}{7} \right\rfloor = 285, \quad |A_{11}| = \left\lfloor \frac{2000}{11} \right\rfloor = 181, \quad |A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{13} \right\rfloor = 153,$$

$$|A_7 \cap A_{11}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 11} \right\rfloor = 25, \quad |A_7 \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 13} \right\rfloor = 21,$$

$$|A_{11} \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{11 \cdot 13} \right\rfloor = 13, \quad |A_7 \cap A_{11} \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 11 \cdot 13} \right\rfloor = 1.$$

$$\begin{aligned} |A_7 \cup A_{11} \cup A_{13}| &= |A_7| + |A_{11}| + |A_{13}| \\ &\quad - |A_7 \cap A_{11}| - |A_7 \cap A_{13}| - |A_{11} \cap A_{13}| \end{aligned}$$

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé - Exemple

Résolution (continuation) : On a

$$|A_7| = \left\lfloor \frac{2000}{7} \right\rfloor = 285, \quad |A_{11}| = \left\lfloor \frac{2000}{11} \right\rfloor = 181, \quad |A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{13} \right\rfloor = 153,$$

$$|A_7 \cap A_{11}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 11} \right\rfloor = 25, \quad |A_7 \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 13} \right\rfloor = 21,$$

$$|A_{11} \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{11 \cdot 13} \right\rfloor = 13, \quad |A_7 \cap A_{11} \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 11 \cdot 13} \right\rfloor = 1.$$

$$\begin{aligned} |A_7 \cup A_{11} \cup A_{13}| &= |A_7| + |A_{11}| + |A_{13}| \\ &\quad - |A_7 \cap A_{11}| - |A_7 \cap A_{13}| - |A_{11} \cap A_{13}| \\ &\quad + |A_7 \cap A_{11} \cap A_{13}| \end{aligned}$$

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé - Exemple

Résolution (continuation) : On a

$$|A_7| = \left\lfloor \frac{2000}{7} \right\rfloor = 285, \quad |A_{11}| = \left\lfloor \frac{2000}{11} \right\rfloor = 181, \quad |A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{13} \right\rfloor = 153,$$

$$|A_7 \cap A_{11}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 11} \right\rfloor = 25, \quad |A_7 \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 13} \right\rfloor = 21,$$

$$|A_{11} \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{11 \cdot 13} \right\rfloor = 13, \quad |A_7 \cap A_{11} \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 11 \cdot 13} \right\rfloor = 1.$$

$$\begin{aligned} |A_7 \cup A_{11} \cup A_{13}| &= |A_7| + |A_{11}| + |A_{13}| \\ &\quad - |A_7 \cap A_{11}| - |A_7 \cap A_{13}| - |A_{11} \cap A_{13}| \\ &\quad + |A_7 \cap A_{11} \cap A_{13}| \\ &= 285 + 181 + 153 \end{aligned}$$

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé - Exemple

Résolution (continuation) : On a

$$|A_7| = \left\lfloor \frac{2000}{7} \right\rfloor = 285, \quad |A_{11}| = \left\lfloor \frac{2000}{11} \right\rfloor = 181, \quad |A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{13} \right\rfloor = 153,$$

$$|A_7 \cap A_{11}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 11} \right\rfloor = 25, \quad |A_7 \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 13} \right\rfloor = 21,$$

$$|A_{11} \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{11 \cdot 13} \right\rfloor = 13, \quad |A_7 \cap A_{11} \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 11 \cdot 13} \right\rfloor = 1.$$

$$\begin{aligned} |A_7 \cup A_{11} \cup A_{13}| &= |A_7| + |A_{11}| + |A_{13}| \\ &\quad - |A_7 \cap A_{11}| - |A_7 \cap A_{13}| - |A_{11} \cap A_{13}| \\ &\quad + |A_7 \cap A_{11} \cap A_{13}| \\ &= 285 + 181 + 153 - 25 - 21 - 13 \end{aligned}$$

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé - Exemple

Résolution (continuation) : On a

$$|A_7| = \left\lfloor \frac{2000}{7} \right\rfloor = 285, \quad |A_{11}| = \left\lfloor \frac{2000}{11} \right\rfloor = 181, \quad |A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{13} \right\rfloor = 153,$$

$$|A_7 \cap A_{11}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 11} \right\rfloor = 25, \quad |A_7 \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 13} \right\rfloor = 21,$$

$$|A_{11} \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{11 \cdot 13} \right\rfloor = 13, \quad |A_7 \cap A_{11} \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 11 \cdot 13} \right\rfloor = 1.$$

$$\begin{aligned} |A_7 \cup A_{11} \cup A_{13}| &= |A_7| + |A_{11}| + |A_{13}| \\ &\quad - |A_7 \cap A_{11}| - |A_7 \cap A_{13}| - |A_{11} \cap A_{13}| \\ &\quad + |A_7 \cap A_{11} \cap A_{13}| \\ &= 285 + 181 + 153 - 25 - 21 - 13 + 1 \end{aligned}$$

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé - Exemple

Résolution (continuation) : On a

$$|A_7| = \left\lfloor \frac{2000}{7} \right\rfloor = 285, \quad |A_{11}| = \left\lfloor \frac{2000}{11} \right\rfloor = 181, \quad |A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{13} \right\rfloor = 153,$$

$$|A_7 \cap A_{11}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 11} \right\rfloor = 25, \quad |A_7 \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 13} \right\rfloor = 21,$$

$$|A_{11} \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{11 \cdot 13} \right\rfloor = 13, \quad |A_7 \cap A_{11} \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 11 \cdot 13} \right\rfloor = 1.$$

$$\begin{aligned} |A_7 \cup A_{11} \cup A_{13}| &= |A_7| + |A_{11}| + |A_{13}| \\ &\quad - |A_7 \cap A_{11}| - |A_7 \cap A_{13}| - |A_{11} \cap A_{13}| \\ &\quad + |A_7 \cap A_{11} \cap A_{13}| \\ &= 285 + 181 + 153 - 25 - 21 - 13 + 1 \end{aligned}$$

= 561 nombres entiers positifs avec les conditions