MAT1500–Mathématiques discrètes

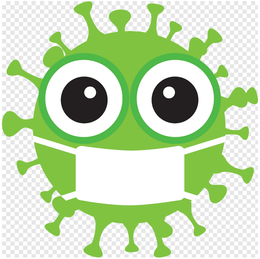
Matilde N. Lalín

Université de Montréal
http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin/mat1500

Le 27 mars 2020

Le menu d'aujourd'hui

- Annonces
- Rappel de 4.6 Permutations et combinaisons généralisés et 5.1 Relations de récurrence
- 5.2 Solutions des relations de récurrence
- 5.4 Principe d'inclusion-exclusion



Université de Montréal

Annonces

- Cours théoriques 24 mars - 17 avril
  https://umontreal.zoom.us/j/145155842.
- Les diapos se trouvent dans le site web du cours
  http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin/mat1500
- Enregistrement des cours théoriques disponible sur Studium.
- Youcef disponible mercredi 13h30-14h30
  https://umontreal.zoom.us/j/7537415921
- Vladimir disponible/TP jeudi 13h30-15h30
  https://umontreal.zoom.us/j/3611549732
- Pages du livre avec questions des TPs disponibles sur Studium.
- Solutionnaires des TPs disponibles sur Studium.

Université de Montréal

Annonces

- Examen final sur Studium.
- Date du final retenue : 24 avril.
- Barème retenue : intra 40%, final 60%.
- La date limite pour abandonner le cours : 15 avril.
- Test bidon disponible sur Studium.

Rappel de 4.6 Permutations et combinaisons généralisés

Théorème : Le nombre de différentes permutations de n objets, où il y a n_1 objets indiscernables de type 1, n_2 objets indiscernables de type 2, . . . , et n_k objets indiscernables de type k (où $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$) est

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

Théorème : Le nombre de façons de distribuer n objets discernables dans k boîtes discernables de manière telle que n_i objets sont rangés dans la boîte i est égal à

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

Rappel de 5.1 Relations de récurrence

Une relation de récurrence pour la suite $\{a_n\}_{n\in N}$ est une formule qui exprime a_n en fonction d'un ou de plusieurs termes parmi $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, pour tout entier $n \geq n_0$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$.

5.2 Solutions des relations de récurrence

Définition : Une relation de récurrence linéaire homogène de degrée k à coefficients constants (RRLHCC de degré k) est une relation de récurrence de la forme

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},$$

où $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ et $c_k \neq 0$.

Par le principe de l'induction, une telle suite est déterminée de manière unique par cette relation et k conditions initiales

$$a_0 = d_0, a_1 = d_1, \ldots, a_{k-1} = d_{k-1}.$$

La relation de récurrence linéaire homogène de degrée k à coefficients constants -Exemples et non-exemples

Exemples

- $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ est une RRLHCC de degrée 2.
- $a_n = a_{n-5}$ est une RRLHCC de degrée 5.
- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}^2$ n'est pas linéaire.
- $h_n = 2h_{n-1} + 1$ n'est pas homogène.
- $b_n = nb_{n-1}$ n'est pas à coefficients constants.

Stratégie pour les solutions d'une RRLHCC

Si

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},$$

on cherche des solutions de la forme $a_n = r^n$.
On a

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_k r^{n-k}.$$

En divisant par r^{n-k} et on écrivant tous les termes du même côté,

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_k = 0. \tag{1}$$

Définition : L'équation (1) est dite équation caractéristique et ses solutions sont dites racines caractéristiques.

Les solutions d'une RRLHCC de degrée 2-Premier cas

Théorème : Soient $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *avec* $c_2 \neq 0$. *Supposons que l'équation caractéristique*

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

a deux racines distinctes r_1 *et* r_2. *Alors la suite* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est solution de la récurrence*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

si et seulement si

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \qquad \forall n,$$

où α_1, α_2 *sont constantes.*

Les solutions d'une RRLHCC de degrée 2-Premier cas

Démonstration : $(\Longleftarrow)$ Supposons que $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$. Alors,

$$\begin{aligned} c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} =& c_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) \\ =& \alpha_1(c_1 r_1^{n-1} + c_2 r_1^{n-2}) + \alpha_2(c_1 r_2^{n-1} + c_2 r_2^{n-2}) \\ =& \alpha_1 r_1^{n-2}(c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(c_1 r_2 + c_2) \\ =& \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \\ =& a_n, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé que $r_1^2 = c_1 r_1 + c_2$ et que $r_2^2 = c_1 r_2 + c_2$.

Université de Montréal

Les solutions d'une RRLHCC de degrée 2-Premier cas

Démonstration : ($\Longrightarrow$) Maintenant supposons que $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ avec $a_0 = d_0$ et $a_1 = d_1$.
On résoudre

$$\begin{cases} d_0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ d_1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \end{cases}$$

On a

$$\alpha_1 = \frac{d_1 - d_0 r_2}{r_1 - r_2}, \qquad \alpha_2 = \frac{d_0 r_1 - d_1}{r_1 - r_2}.$$

Avec ces valeurs pour α_1, α_2, la suite donnée par $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ satisfait les deux conditions initiales et la relation de récurrence.
L'unicité provient du principe de l'induction. $\square$

Les solutions d'une RRLHCC de degrée 2-Exemple

Exemple : Quelle est la solution de

- $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$
- $a_0 = 1,\ a_1 = 8$?

Résolution : L'équation caractéristique est

$$r^2 - r - 2 = 0$$

et ses racines sont $r_1 = 2$, $r_2 = -1$. Il faut résoudre

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 8 = \alpha_1 2 + \alpha_2(-1) \end{cases}$$

La somme donne $9 = 3\alpha_1 \Longrightarrow \alpha_1 = 3$. On replace la valeur de α_1 dans n'importe quelle équation pour obtenir $\alpha_2 = -2$. On a donc $a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot (-1)^n$.

La suite de Fibonacci

Rappelons que

- $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pour $n \geq 2$.
- $f_0 = 0,\ f_1 = 1$

On suivant la même méthode, on trouve,

$$r^2 - r - 1 = 0, \qquad r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)(\alpha_1 - \alpha_2) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\Longrightarrow f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Université de Montréal

Les solutions d'une RRLHCC de degrée 2-Deuxième cas

Théorème : Soient $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *avec* $c_2 \neq 0$*. Supposons que l'équation caractéristique*

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

a une racine double r_0*. Alors la suite* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est solution de la récurrence*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

si et seulement si

$$a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n \qquad \forall n,$$

où α_1, α_2 *sont constantes.*

Les solutions d'une RRLHCC de degrée 2-Exemple

Exemple : Quelle est la solution de

- $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$
- $a_0 = 2,\ a_1 = 9$?

Résolution : On suivant la même méthode, on trouve,

$$r^2 - 6r + 9 = 0, \qquad r_0 = 3 \qquad \text{racine double.}$$

$$\begin{cases} 2 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 0 \\ 9 = \alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 1 \cdot 3 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1.$

$$\Longrightarrow a_n = 2 \cdot 3^n + n3^n = (n+2)3^n.$$

Les solutions d'une RRLHCC de degrée k-Premier cas

Théorème : Soient $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ *avec* $c_k \neq 0$*. Supposons que l'équation caractéristique*

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_k = 0$$

a k *racines distinctes deux à deux* r_1, r_2, $\ldots$, r_k*. Alors la suite* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est solution de la récurrence*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

si et seulement si

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \cdots + \alpha_k r_k^n \qquad \forall n,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *sont constantes.*

Observation : La version la plus générale du théorème précédent inclut des multiplicités sur quelques racines.

Les solutions d'une RRLHCC de degrée k-Exemple

Exemple : Quelle est la solution de

- $a_n = 7a_{n-1} - 14a_{n-2} + 8a_{n-3}$
- $a_0 = 2,\ a_1 = 5,\ a_2 = 15$?

Résolution : On suivant la même méthode, on trouve,

$$r^3 - 7r^2 + 14r - 8 = 0, \qquad r_1 = 1, \qquad r_2 = 2, \qquad r_3 = 4.$$

$$\begin{cases} 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 5 = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 4 \\ 15 = \alpha_1 \cdot 1^2 + \alpha_2 \cdot 2^2 + \alpha_3 \cdot 4^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 3 = \alpha_2 + \alpha_3 3 \\ 13 = \alpha_2 3 + \alpha_3 15 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 3 = \alpha_2 + \alpha_3 3 \\ 4 = \alpha_3 6 \end{cases} \Longrightarrow \alpha_1 = \frac{1}{3}, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = \frac{2}{3}$$

$$\Longrightarrow a_n = \frac{1}{3} + 2^n + \frac{2}{3} 4^n.$$

5.4 Principe d'inclusion-exclusion

Théorème : Soient A et B deux ensembles finis. Alors,

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|.$$

Problème : Une classe de mathématiques discrètes comprend 200 étudiants en mathématiques, 150 étudiants en informatique, et 110 étudiants à la fois en mathématiques et en informatique.
Combien y a-t-il d'étudiants dans cette classe si tout étudiant est inscrit à au moins une discipline ?
Résolution : Soient

$$M = \{\text{étudiants en mathématiques}\}$$

$$I = \{\text{étudiants en informatique}\}$$

Nous avons $|M| = 200$, $|I| = 150$, $|M \cap I| = 110$. Alors
$|\{\text{étudiants}\}| = |M \cup I| = |M| + |I| - |M \cap I| = 200 + 150 - 110 = 240.$

Université de Montréal

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé

Théorème : Soient $n \in \mathbb{Z}_0$, $A_1, \dots, A_n$ ensembles finis. Alors,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n} \left|\bigcap_{j=1}^{r} A_{i_j}\right|.$$

Avec la notation un peu plus simple,

$$\begin{aligned}|A_1 \cup \cdots \cup A_n| =& \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| \\ &+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &- \cdots \\ &+ (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.\end{aligned}$$

Université de Montréal

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé - cas $n = 3$

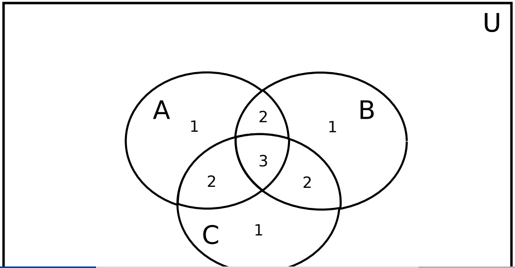
Théorème : Soient A, B, C ensembles finis. Alors,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A| + |B| + |C|$$

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C|$$

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



Principe de l'inclusion-exclusion généralisé

Démonstration : Soit a un élément qui appartient à exactement r des ensembles $A_1, \ldots, A_n$. a est dénombré

- $r = C(r,1)$ fois par $\sum |A_i|$,
- $C(r,2)$ fois par $\sum |A_i \cap A_j|$,
- $C(r,3)$ fois par $\sum |A_i \cap A_j \cap A_k|$,
- $C(r,m)$ fois par $\sum |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_m}|$ si $m \leq r$ et 0 si $m > r$.

Par conséquent, a est dénombré

$$C(r,1) - C(r,2) + C(r,3) - \cdots + (-1)^{r+1} C(r,r) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} C(r,k)$$

fois. Comme

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k C(r,k) = 0,$$

on conclut que a est dénombré exactement une fois.

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé - Exemple

Problème : Combien existe-t-il de nombres entiers positifs qui n'excèdent pas 2000 et qui sont divisibles par 7, par 11, ou par 13?

Résolution : Soient

$$\begin{aligned} A_7 &= \{1 \leq n \leq 2000 \,|\, 7 \text{ divise } n\} \\ A_{11} &= \{1 \leq n \leq 2000 \,|\, 11 \text{ divise } n\} \\ A_{13} &= \{1 \leq n \leq 2000 \,|\, 13 \text{ divise } n\} \end{aligned}$$

Observons que

$$\begin{aligned} A_b \cap A_c &= \{1 \leq n \leq 2000 \,|\, b, c \text{ divise } n\} \\ &= \{1 \leq n \leq 2000 \,|\, \mathrm{ppcm}(b,c) \text{ divise } n\} \\ &= A_{\mathrm{ppcm}(b,c)}. \end{aligned}$$

Université de Montréal

Principe de l'inclusion-exclusion généralisé - Exemple

Résolution (continuation) : On a

$$|A_7| = \left\lfloor \frac{2000}{7} \right\rfloor = 285, \quad |A_{11}| = \left\lfloor \frac{2000}{11} \right\rfloor = 181, \quad |A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{13} \right\rfloor = 153,$$

$$|A_7 \cap A_{11}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 11} \right\rfloor = 25, \quad |A_7 \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 13} \right\rfloor = 21,$$

$$|A_{11} \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{11 \cdot 13} \right\rfloor = 13, \quad |A_7 \cap A_{11} \cap A_{13}| = \left\lfloor \frac{2000}{7 \cdot 11 \cdot 13} \right\rfloor = 1.$$

$$\begin{aligned}
|A_7 \cup A_{11} \cup A_{13}| =& |A_7| + |A_{11}| + |A_{13}| \\
& - |A_7 \cap A_{11}| - |A_7 \cap A_{13}| - |A_{11} \cap A_{13}| \\
& + |A_7 \cap A_{11} \cap A_{13}| \\
=& 285 + 181 + 153 - 25 - 21 - 13 + 1 \\
=& 561 \text{ nombres entiers positifs avec les conditions.}
\end{aligned}$$