MAT1500–Mathématiques discrètes

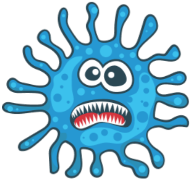
Matilde N. Lalín

Université de Montréal
http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin/mat1500

Le 24 mars 2020

Le menu d'aujourd'hui

- Annonces
- Rappel de 4.3 Propriétés des coefficients binomiaux
- Rappel de 4.6 permutations avec remise, combinaisons avec remise
- 4.6 Permutations et combinaisons généralisés
- 5.1 Relations de récurrence



Annonces

- Cours théoriques 24 mars - 17 avril
  https://umontreal.zoom.us/j/145155842.
- Les diapos se trouvent dans le site web du cours
  http://www.dms.umontreal.ca/~mlalin/mat1500
- Deux versions: ligne par ligne et imprimable.
- Enregistrement des cours théoriques (si bien fait) disponible sur Studium.
- Je reste connectée pour des dispo après chaque cours théorique, jusqu'à 13h30.

Université de Montréal

Annonces

- 4 TPs à faire.
- Pages du livre avec questions des TPs disponibles sur Studium.
- Solutionnaire (en anglais) des TPs disponible sur Studium.
- Youcef est en train de rédiger des solutionnaires en français qui seront disponibles sur Studium.
- Youcef disponible mercredi 13h30-14h30 https://umontreal.zoom.us/j/7537415921
- Vladimir disponible/TP jeudi 13h30-15h30 par zoom.

Annonces

- Examen final sur Studium.
- Date du final retenue : 24 avril.
- Barème retenue : intra 40%, final 60%.

Rappel de 4.3 Propriétés des coefficients binomiaux

- L'identité de Pascal : $C(n+1, r) = C(n, r-1) + C(n, r)$.
- Triangle de Pascal
- La somme de chaque ligne du triangle de Pascal : $\sum_{k=0}^{n} C(n, k) = 2^n$.
- L'identité de Vandermonde :
  $C(m+n, r) = \sum_{k=0}^{r} C(m, k) C(n, r-k)$
- $C(2n, n) = \sum_{k=0}^{n} C(n, k)^2$.
- Le théorème du binôme : $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n, k) x^k y^{n-k}$.
- $\sum_{k=0}^{n} C(n, k) = 2^n$
- $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n, k) = 0$

Université de Montréal

Rappel de 4.6 Permutations et combinaisons avec remise

Le nombre de r-permutations d'un ensemble à n éléments avec remise est

$$n^r.$$

Soient $n, r \in \mathbb{N}$. Le nombre de r-combinaisons d'un ensemble à n éléments avec remise est

$$C(r+n-1, r).$$

Université de Montréal

Combinaisons avec remise - Exemple

Problème : Combien de solutions l'équation

$$x_1 + \cdots + x_m = s$$

admet-elle, où $x_i \in \mathbb{N}$ $1 \leq i \leq m$, $s \in \mathbb{N}$?
Résolution : On doit distribuer s unités en m places. L'équation admet

$$C(s+m-1, s) = \frac{(s+m-1)!}{s!(m-1)!}$$

solutions.

Université de Montréal

Permutations d'ensembles d'objets indiscernables - Exemple

Problème : Combien de chaînes différentes peut-on former en ordonnant les lettres du mot ≪ENSEMBLES≫?

Résolution : On a neuf lettres: 3 E's, 2 S's, 1 B, 1 L, 1 N, 1 M. On peut chosir les places pour les E's de $C(9,3)$ manières. On peut choisir les places pour les S's de $C(6,2)$ manières. Pour les autres lettres, on peut choisir leurs places de $C(4,1), C(3,1), C(2,1), C(1,1)$ manières. Par le principe du produit on obtient

$$
\begin{aligned}
& C(9,3)\cdot C(6,2)\cdot C(4,1)\cdot C(3,1)\cdot C(2,1)\cdot C(1,1)\\
=& \frac{9!}{3!6!\cancel{6!}}\cdot\frac{6!\cancel{6!}}{2!4!\cancel{4!}}\cdot\frac{4!\cancel{4!}}{1!3!\cancel{3!}}\cdot\frac{3!\cancel{3!}}{1!2!\cancel{2!}}\cdot\frac{2!\cancel{2!}}{1!1!\cancel{1!}}\cdot\frac{1!\cancel{1!}}{1!0!}\\
=& \frac{9!}{3!2!1!1!1!1!} = 30.240 \text{ chaînes.}
\end{aligned}
$$

□

Université de Montréal

Permutations d'ensembles d'objets indiscernables

Théorème : Le nombre de différentes permutations de n objets, où il y a n_1 objets indiscernables de type 1, n_2 objets indiscernables de type 2, …, et n_k objets indiscernables de type k (où $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$) est

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

Démonstration : On peut choisir n_1 positions pour les objets de type 1 de $C(n, n_1)$ manières. On peut choisir n_2 positions pour les objets de type 2 de $C(n - n_1, n_2)$ manières. Et on continue jusqu'à n_k positions pour les objets de type k de $C(n - n_1 - \cdots - n_{k-1}, n_k) = C(n_k, n_k) = 1$ manières.

Permutations d'ensembles d'objets indiscernables

Démonstration (continuation) : Par le principe du produit, on a

$$C(n, n_1) \cdot C(n - n_1, n_2) \cdots C(n - n_1 - \cdots - n_{k-1}, n_k)$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!\cancel{(n-n_1)!}} \frac{(n-n_1)!\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!(n-n_1-n_2)!\cancel{(n-n_1-n_1)!}} \cdots \frac{(n - n_1 - n_2 - \dots}{n_{\dots}}$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

$\square$

Distribution d'objets discernables dans des boîtes discernables- Exemple

Problème : De combien de façons peut-on distribuer des mains de 5 cartes à chacun des quatre joueurs à partir d'un jeu standard de 52 cartes?

Résolution : On choisit les 5 cartes pour le premier joueur de $C(52,5)$ manières. On choisit les 5 cartes pour le deuxième joueur de $C(47,5)$ manières. On a $C(42,5)$ manières pour le troisième joueur, et $C(37,5)$ manières pour le quatrième joueur. Par le principe du produit, le total est

$$C(52,5)\cdot C(47,5)\cdot C(42,5)\cdot C(37,5)=\frac{52!}{5!5!5!5!32!} \text{ façons.}$$

$\square$

Université de Montréal

Distribution d'objets discernables dans des boîtes discernables

Théorème : Le nombre de façons de distribuer n objets discernables dans k boîtes discernables de manière telle que n_i objets sont rangés dans la boîte i est égal à

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

Démonstration : On choisit les n_1 objets pour la première boîte de $C(n, n_1)$ manières, les n_2 objets pour la deuxième boîte de $C(n-n_1, n_2)$ manières, et on continue jusqu'à les n_k objets pour la k-ième boîte de $C(n-n_1-\cdots-n_{k-1}, n_k) = C(n_k, n_k) = 1$ manières. Par le principe du produit on a

$$C(n, n_1)\cdot C(n-n_1, n_2)\cdots C(n-n_1-\cdots-n_{k-1}, n_k)$$
$$=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

□

Université de Montréal

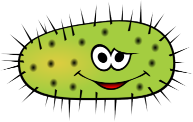
5.1 Relations de récurrence

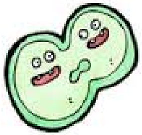
Définition : Une relation de récurrence pour la suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une formule qui exprime a_n en fonction d'un ou de plusieurs termes qui le précèdent dans la suite, soit $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, pour tout entier $n \geq n_0$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$.

Une suite est une solution d'une relation de recurrence si ses termes satisfont la relation de recurrence.

Relations de récurrence - Exemple

Problème : Le nombre de bactéries d'une colonie double chaque heure. Si cette colonie comprend cinq bactéries à l'origine, combien y aura-t-il de bactéries après 4 heures?





Résolution : Soit a_n le nombre de bactéries après n heures. On a

- $a_0 = 5$.
- $a_n = 2a_{n-1}$, $n \geq 1$.

On peut prouver par induction que $a_n = 5 \cdot 2^n$ (exercice pour vous!)

Université de Montréal

Relations de récurrence - Exemple

Exemple : Soit

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \qquad n \geq 2 \tag{1}$$

une relation de récurrence.

- $a_n = 3n$ est solution de (1), car

$$\begin{aligned} 2a_{n-1} - a_{n-2} &= 2(3(n-1)) - 3(n-2) \\ &= 6n - 6 - 3n + 6 \\ &= 3n \\ &= a_n. \end{aligned}$$

Université de Montréal

Relations de récurrence - Exemple

Exemple : Soit

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \qquad n \geq 2 \tag{1}$$

une relation de récurrence.

- $a_n = 5$ est aussi solution de (1), car

$$\begin{aligned} 2a_{n-1} - a_{n-2} &= 2 \cdot 5 - 5 \\ &= 5 \\ &= a_n. \end{aligned}$$

- $a_n = 2^n$ n'est pas solution de (1), car

$$\begin{aligned} 2a_{n-1} - a_{n-2} &= 2 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-2} \\ &= 4 \cdot 2^{n-2} - 2^{n-2} \\ &= 3 \cdot 2^{n-2} \\ &\neq 2^n = a_n. \end{aligned}$$

Université de Montréal

Les conditions initiales d'une relation de récurrence

Définition : Les conditions initiales spécifient les éléments qui précèdent le premier élément à partir duquel la relation de récurrence s'applique.

Exemple : Si

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \qquad n \geq 2,$$

et

$$a_0 = 0, a_1 = 3,$$

cela donne que $a_n = 3n$ (il faut le prouver par induction).
Cette solution est unique, car une fois que a_0 et a_1 sont choisis, les valeurs de a_2, a_3, etc sont données par la relation de récurrence.
De même, $a_0 = a_1 = 5$ donne la solution $a_n = 5$.

Université de Montréal

Exemple - Le calcul de l'intérêt composé

Problème : On suppose qu'une personne dépose \$10.000 dans une compte d'épargne et bénéficie d'un taux d'intérêt de 6% par an composé annuellement. Quel sera le montant accumulé dans ce compte après 30 ans ?

Résolution : Soit p_n le montant accumulé (en dollars) après n ans. On a

- $p_n = p_{n-1} + 0,06 \cdot p_{n-1} = 1,06 \cdot p_{n-1},\ n \geq 1$.
- $p_0 = 10.000$

Par induction, on peut prouver (attention, il faut faire la preuve) que

$$p_n = (1,06)^n \cdot p_0 = (1,06)^n \cdot 10.000.$$

On trouve donc que le montant accumulé après 30 ans est $p_{30} = (1,06)^{30} \cdot 10.000 \cong 57.434,91$.

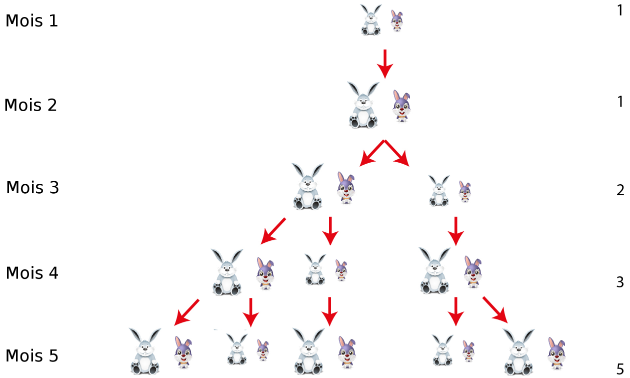
Un problème de lapins

Problème : Un jeune couple de lapins est laisé dans un île deserte. Ce couple est incapable de se réproduire avant que les deux lapins ayent deux mois. Après deux mois, un couple donne naissance a un autre couple de lapins, et ce tous les mois.

Trouver une relation de récurrence permettant de calculer le nombre de couples de lapins au bout de n mois, en supposant qu'aucun lapin ne meure.

Université de Montréal

Un problème de lapins



Université de Montréal

Un problème de lapins

Résolution : Soit ℓ_n le nombre de couples de lapins après n mois. On a

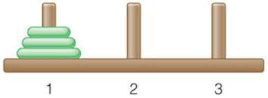
- $\ell_n =$ couples des mois précendents $+$ nouveaux nés $= \ell_{n-1} + \ell_{n-2}$, $n \geq 3$.
- $\ell_1 = \ell_2 = 1$

Le nombre de couples de lapins au bout de n mois est doné par $\ell_n = f_n$, la suite de Fibonacci!

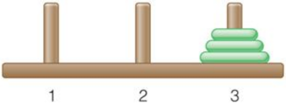
Université de Montréal

La tour de Hanoï

Problème : On a trois bâtons sur lesquels sont enfilés de disques de différentes largeurs.
Au début, tous les disques sont enfilés sur le premier bâton, en ordre croissant.



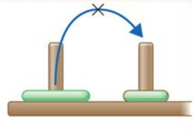
Le but est de replacer tous les disques en ordre croissant sur le troisième baton on suivant des certaines règles.



La tour de Hanoï -les règles

- On ne peut déplacer plus d'un disque à la fois.

- On ne peut placer un disque que sur un autre disque plus grand que lui ou sur un emplacement vide.



Université de Montréal

La tour de Hanoï- Question

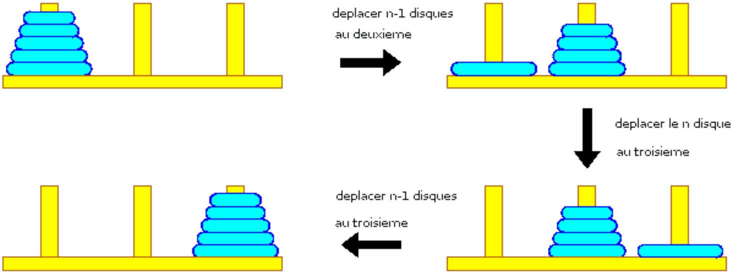
Question : Trouver h_n, le nombre minimal de déplacement nécessaires pour n disques.

Résolution : On observe qu'on a besoin de

- h_{n-1} mouvements pour transférer les premiers $n-1$ disques du premier bâton au deuxième.
- 1 mouvement pour transférer le n-ième disque du premier bâton au troisième.
- h_{n-1} mouvements pour transférer les premiers $n-1$ disques du deuxième bâton au troisième.

Université de Montréal

La tour de Hanoï



La tour de Hanoï

Résolution (continuation) : Alors, on a

- $h_n = 2h_{n-1} + 1,\ n \geq 2$.
- $h_1 = 1$.

On voit que $h_1 = 1,\ h_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3,\ h_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$.
Prouvons par induction que $h_n = 2^n - 1$.
On a vu que $P(1)$ est V.
Supposons que $P(n)$ est V. Alors,

$$h_{n+1} = 2h_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1.$$

On conclut que $P(n+1)$ est V et que $h_n = 2^n - 1$ par induction.
Vous pouvez jouer en ligne.

Curiosité-La tour de Hanoï

- Selon une légende, il existe une tour à Hanoï où des moines transfèrent 64 disques d'or d'un bâton à un autre bâton en suivant les règles que nos avons données.
- Il leur faut une seconde pour déplacer chaque disque.
- Le mythe affirme que le monde s'éteindra quand les moines auront terminé le transfert.

Est-ce que nous devrions nous inquiéter ?

Curiosité-La tour de Hanoï

Réponse : Les moines devront effectuer

$$2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$$

mouvements. À raison d'un déplacement par seconde, il leur faudra plus de $\frac{2^{64}-1}{365 \cdot 24 \cdot 3600} \approx 584.942.417.355 \approx 5,849 \times 10^{11}$ années pour finir le jeu !

L'âge de l'univers est $13,772 \times 10^9$ ans et celle de la Terre est $4,543 \times 10^9$.

En supposant que les moines travaillent depuis le début de l'univers, ils ont déplacé $\log_2(13,772 \cdot 10^9 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600) \approx 58$ disques. S'ils travaillent depuis la formation de la Terre, ils ont déplacé 56 disques.

Il ne faut pas s'inquiéter pour la tour de Hanoï !

Université de Montréal

Des chaînes binaires

Problème : Trouvez une relation de récurrence et donnez les conditions initiales permettant de calculer le nombre de chaînes binaires de longeur n qui ne contient pas deux 1 consécutifs.

Combien existe-t-il des chaînes de ce type dont la longeur est 4?

On avait répondu à cette question en utilisant un diagramme en arbre.

Résolution : Soit a_n le nombre de chaînes de longeur n sans deux 1 consécutifs. On a que

- $a_n =$ chaînes qui finissent par 0 + chaînes qui finissent par 1 $= a_{n-1}+$chaînes qui finissent par 01$=a_{n-1}+a_{n-2}$, $n \geq 3$.
- $a_1 = 2$, $a_2 = 3$.

On trouve simplement $a_3 = a_2 + a_1 = 3 + 2 = 5$, $a_4 = a_3 + a_2 = 5 + 3 = 8$. Plus généralement, $a_n = f_{n+2}$.

Énumeration de mots de code

Problème : Un système informatique considère qu'une chaîne de chiffres décimaux est un mot de code valide s'il contient un nombre pair de chiffres 0. Par exemple, 1230407869 est valide, tandis que 12098700 ne l'est pas. Soit a_n le nombre de mots de code valides de n chiffres. Trouver une relation de récurrence pour a_n.

Résolution : On a $a_1 = 9$ parce qu'il y a une seule chaîne d'un chiffre, la chaîne $\ll 0 \gg$, qui n'est pas valide.
Une chaîne valide de n chiffres peut être formée

- en ajoutant un chiffre différent de 0 à une chaîne valide de $n-1$ chiffres,
- en ajoutant un $\ll 0 \gg$ a une chaîne non valide de $n-1$ chiffres.

Université de Montréal

Énumeration de mots de code

Résolution (continuation) : Le nombre total de chaînes de longeur n sans restriction est 10^n.
On a donc

$$\begin{aligned} a_n =& 9a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1}) \\ =& 8a_{n-1} + 10^{n-1} \end{aligned}$$

chaînes de longeur n.

Université de Montréal