

8 Fluides non-newtoniens.

8.1 Introduction

Les fluides non-newtoniens sont définis comme des fluides pour lesquels le tenseur des extra-tensions ne peut pas être exprimé comme une fonction linéaire et isotrope des composantes du tenseur de vitesse de déformation. Pour les fluides incompressibles ce sont les fluides dont le comportement ne peut pas être prédit par les équations classiques de Navier-Stokes (voir les équations (235)). Les exemples de fluides non-newtoniens abondent dans la nature et l'industrie: la plupart des fluides des corps vivants tel que le sang et le mucus sont non-newtoniens et une quantité de produits alimentaires le sont aussi: blanc d'oeuf, fromage fondu et chocolats fondus sont des exemples frappants. La pâte utilisée pour la fabrication du papier est non-newtonienne, ainsi que le plastique fondu et d'autres produits industriels qui entrent dans la composition de produits tels que les textiles, les sacs en plastique etc. à travers des processus d'extrusion, moulage, soufflage et filage. Souvent, un matériau d'intérêt industriel est rendu non-newtonien par ajout de divers polymères. L'industrie des détergents ajoute des polymères aux shampoings, gels, décolorants, agents nettoyants pour améliorer leurs propriétés rhéologiques. Les polymères inélastiques sont utilisés, par exemple, pour épaissir les soupes et les sauces. Les peintures et dentifrices sont épaissis de la même manière. Les caractéristiques d'écoulement particulières de ketchup, de rouge à lèvres et de peintures sont expliquables en fonction de leurs propriétés rhéologiques, et ce sont exploitées par leurs fabricants. L'industrie automobile est aussi concernée par les fluides non-newtoniens: les huiles multigrades ont des polymères comme additifs (améliorants d'indice de viscosité) pour modifier le comportement de leur viscosité sous des contraintes de pression et de température extrêmes. Les huiles épaissies par ajout de polymère et utilisées dans les roulements diminuent les frottements par rapport aux huiles newtoniennes sans pour autant réduire leurs durées de vie.

Comme autre application de fluides non-newtoniens, on peut considérer un exemple de l'industrie de pétrole: une fois que la pression naturelle qui pousse le pétrole à la surface de la terre est inférieure à un certain niveau, les compagnies pétrolières utilisent un processus connu sous le nom de "enhanced oil recovery" pour extraire le pétrole restant dans le réservoir de roches poreuses. Si de l'eau est injectée dans le champ de pétrole pour amener le pétrole à la surface, des instabilités à l'interface entre l'eau et le pétrole peuvent survenir et il en résulte un phénomène connu sous le nom de "fingering". Des solutions de polymères sont appliquées pour stabiliser l'interface entre l'eau et le pétrole et il en résulte une plus grande proportion de pétrole extraite.

8.2 Fluides newtoniens généralisés.

Dans §5.4 les fluides newtoniens ont été caractérisés par l'hypothèse que le tenseur deviateur des contraintes \mathbf{T} était une fonction *linéaire* des composantes du gradient de

vitesse ce qui a conduit à la dérivation des équations de Navier-Stokes (229). Dans un écoulement cisailé simple et en régime stationnaire avec

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = (\dot{\gamma}_{xy}y, 0, 0), \quad (387)$$

l'état correspondant du tenseur des contraintes est donc donné par

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} -p & \eta \dot{\gamma}_{xy} & 0 \\ \eta \dot{\gamma}_{xy} & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}, \quad (388)$$

et la contrainte de cisaillement est donnée par $\sigma_{xy} = \eta \dot{\gamma}_{xy}$ où η est la (constante) viscosité de cisaillement et $\dot{\gamma}_{xy}$ est la composante xy du tenseur de vitesse de déformation $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$.

Dans un premier pas vers la dérivation d'équations constitutives pour les fluides non-newtoniens on pourrait abandonner l'hypothèse de la linéarité du tenseur deviateur des contraintes par rapport aux gradients de vitesse et au lieu de cela écrire la viscosité η en fonction des invariants de $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$, c.à.d. en fonction de quantités associées à $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$. (Dans (225) on avait remarqué que λ , η et ν sont des coefficients scalaires.)

8.2.1 Dérivation du tenseur des contraintes.

Il est bien connu, en se référant aux ouvrages d'algèbre linéaire élémentaires, que les valeurs propres λ_1 , λ_2 et λ_3 d'un tenseur du deuxième ordre \mathbf{A} sont des invariants de \mathbf{A} et dans le cas où \mathbf{A} est symétrique, ces valeurs sont réelles. Les valeurs propres sont définies comme étant les racines de l'équation caractéristique

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0. \quad (389)$$

En explicitant (389) et en notant $\{a_{ij}\}$ les composantes de \mathbf{A} , on a

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0, \quad (390)$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ &= \text{tr} \mathbf{A} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \end{aligned} \quad (391)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= (a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22}) - (a_{23}^2 + a_{13}^2 + a_{12}^2) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3, \end{aligned} \quad (392)$$

et

$$\begin{aligned} I_3 &= a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{23}a_{31}a_{12} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{21}^2 \\ &= \det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \end{aligned} \quad (393)$$

sont les coefficients de l'équation cubique (390) pour un tenseur de second ordre symétrique \mathbf{A} . Ce sont des invariants de \mathbf{A} , appelés *invariants principaux* de \mathbf{A} .

On écrit maintenant, comme généralisation de (233) que

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta(I, II, III)\dot{\gamma}_{ij}, \quad (394)$$

où I, II et III maintenant dénotent les fonctions polynomiales des invariants principaux du tenseur de vitesse de déformation $\dot{\gamma}$, définies par

$$I = I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \dot{\gamma}_{ii} = \text{tr } \dot{\gamma} \quad (395)$$

$$II = I_1^2 - 2I_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \dot{\gamma}_{ij}\dot{\gamma}_{ji} = \text{tr } \dot{\gamma}^2 \quad (396)$$

et

$$\begin{aligned} III &= 3I_3 + I_1^3 - 3I_1I_2 = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 \\ &= \dot{\gamma}_{ij}\dot{\gamma}_{jk}\dot{\gamma}_{ki} = \text{tr } \dot{\gamma}^3, \end{aligned} \quad (397)$$

et λ_1, λ_2 et λ_3 maintenant expriment les valeurs propres de $\dot{\gamma}$.

Théorème

Soient I, II et III définis par (395) - (397). Alors

- 1. I, II and III sont des invariants de $\dot{\gamma}$.*
- 2. σ défini par (394) est une fonction isotrope de $\dot{\gamma}$.*

Démonstration.

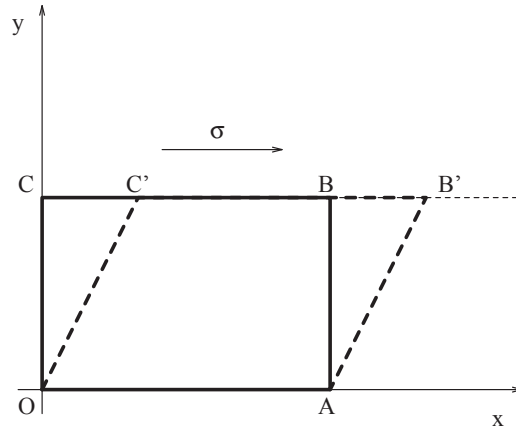


Figure 34: Ecoulement de cisaillement simple d'un fluide.

Il a été déjà démontré que pour un fluide incompressible $\dot{\gamma}_{ii} = 2\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Ainsi, I est nul dans ce cas. Pour un écoulement de cisaillement simple (387),

$$II = \text{tr } \dot{\boldsymbol{\gamma}}^2 = 2\dot{\gamma}^2 \quad (398)$$

et

$$III = \text{tr } \dot{\boldsymbol{\gamma}}^3 = 0, \quad (399)$$

et il est normal, par conséquent, d'écrire η en fonction du taux de cisaillement

$$\dot{\gamma} := \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\gamma}} : \dot{\boldsymbol{\gamma}}} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i,j} \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij}}. \quad (400)$$

quand on utilise le modèle newtonien généralisé pour décrire un écoulement simple de cisaillement.

8.3 Fluides non-newtoniens en cisaillement

Pour clarifier les différences de comportement entre les fluides newtoniens et non-newtoniens on considère les deux types de fluides dans le cas d'un écoulement simple cisailé en régime stationnaire, dont le champ de vitesse est

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = (\dot{\gamma}_{xy}y, 0, 0), \quad (401)$$

comme illustré sur la Figure 34. La valeur absolue de $\dot{\gamma}_{xy}$ est égal au taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ dans ce contexte. On écrit la solution des équations de Navier-Stokes en régime

stationnaire comme suit

$$\mathbf{v} = (\dot{\gamma}_{xy}y, 0, 0), \quad (402)$$

$$p = \text{constante}, \quad (403)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p, \quad (404)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma = \eta \dot{\gamma}_{xy}, \quad (405)$$

$$\sigma_{ij} = 0, \text{ autrement.} \quad (406)$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy pour un fluide non-newtonien subissant un écoulement similaire a les composantes suivantes

$$\sigma_{xy} = \sigma = \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma}_{xy}, \quad (407)$$

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = N_1(\dot{\gamma}), \quad (408)$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{zz} = N_2(\dot{\gamma}), \quad (409)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0. \quad (410)$$

Les quantités η , N_1 et N_2 sont les *fonctions viscométriques*. Dans le cas présent η est la viscosité de cisaillement et N_1 et N_2 sont la première et deuxième différences normales des contraintes. De (404) on déduit que N_1 et N_2 sont nuls dans le cas newtonien. Une conclusion qu'on peut tirer des équations (404)-(405) et (407)-(409) est que pour un fluide newtonien, une contrainte de cisaillement constante est suffisante pour générer un écoulement simple cisailé. Par contre, dans le cas non-newtonien, une force normale à la plaque supérieure peut être nécessaire. En réalité, la présence de différences de contraintes normales non nulles est due à un type particulier de fluides non-newtoniens appelé fluide *viscoélastique*. Les différences normales de contraintes dans un fluide viscoélastique se manifestent souvent d'une façon spectaculaire - l'effet Weissenberg (c'est à dire, la montée d'un fluide le long d'une tige), gonflement après extrusion etc.

8.3.1 La viscosité de cisaillement

En général, pour les fluides non-newtoniens, la relation entre la contrainte de cisaillement et la vitesse de déformation dans un écoulement simple est non-linéaire. Dans l'écoulement simple cisailé décrit en (401) dans la relation

$$\sigma = \eta \dot{\gamma}_{xy}, \quad (411)$$

qui est valable pour un fluide newtonien, est en général, remplacée par

$$\sigma = \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma}_{xy}, \quad (412)$$

où η est maintenant la *viscosité de cisaillement*. Pour la plupart des fluides non-newtoniens η est une fonction monotone décroissante en $\dot{\gamma}$ et tend vers une limite

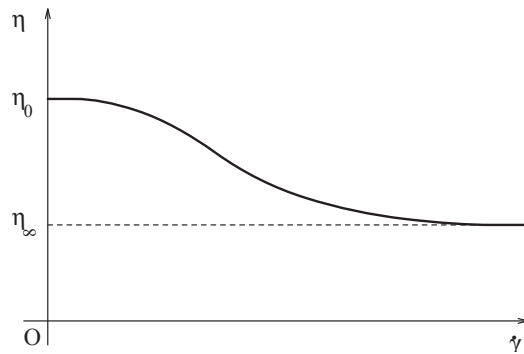


Figure 35: Viscosité de cisaillement $\eta = \eta(\dot{\gamma})$.

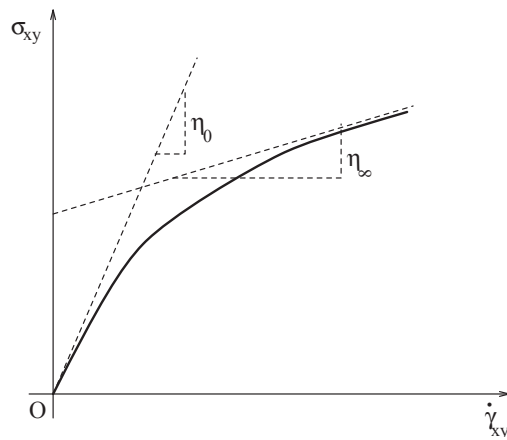


Figure 36: Contrainte de cisaillement $\sigma = \sigma_{xy} = \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma}_{xy}$.

η_∞ pour des taux des cisaillements élevés. Les fluides montrant cette caractéristique sont appelés fluides *pseudoplastiques*. Les Figures 35 et 36 (avec une échelle log-log) illustrent respectivement la viscosité de cisaillement η et la contrainte de cisaillement σ en fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ pour un fluide pseudoplastique. Des exemples pratiques de fluides pseudoplastiques sont: le sang, le dentifrice, les solutions de polyacrylamide, yoghourt etc. La pseudoplasticité explique le résultat expérimental (voir Figure 37) obtenu pour un fluide newtonien et certains fluides non-newtoniens: deux tubes dont les bases inférieures sont recouvertes d'une plaque plane, contiennent deux fluides; le premier avec un fluide newtonien (N) et le deuxième un fluide non-newtonien (NN). Le fluide non-newtonien est choisi tel que la viscosité est identique à celle du cas newtonien pour les faibles taux de cisaillements. Si cette condition est satisfaite, deux petites sphères identiques tomberont à travers les deux fluides à la même vitesse,

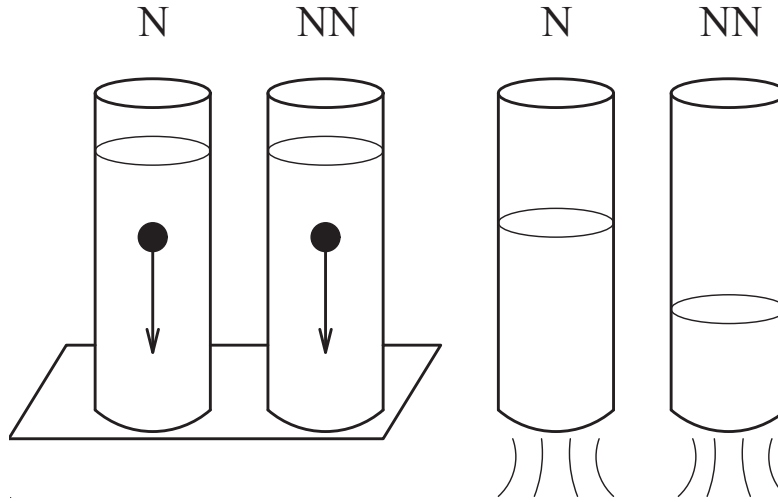


Figure 37: Expérience montrant la pseudoplasticité.

étant donné que la viscosité est une constante de proportionnalité dans l'expression de la traînée sur chaque sphère. Mais si la plaque se trouvant à la base des deux tubes est enlevée, le fluide non-newtonien peut cependant s'écouler plus rapidement que dans le cas newtonien. Le fluide non-newtonien manifeste ainsi une décroissance de viscosité dans la région de cisaillement du deuxième écoulement. Etant donné que la pseudoplasticité est un phénomène très connu parmi les fluides non-newtoniens d'importance industrielle, on considérera plusieurs modèles proposés pour décrire ce comportement.

Pour modéliser la pseudoplasticité et capturer les caractéristiques principales de comportement de η avec $\dot{\gamma}$ comme sur la Figure 35, plusieurs modèles de η en fonction de $\dot{\gamma}$ ont été proposés dans la littérature. Avec η_0 pour la valeur de viscosité à taux de cisaillement nul et η_∞ la limite de η quand $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$, le modèle de Cross (1965) est donné par

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \frac{1}{1 + (K\dot{\gamma})^k}, \quad (413)$$

où K et k sont des constantes positives (paramètres). On peut voir ainsi que lorsque $\dot{\gamma} = 0$, $\eta = \eta_0$ et quand $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow \eta_\infty$. Un graphique modélisant la viscosité en cisaillement pour un mélange aqueux de polyacrylamide ($\eta_0 = 1.82\text{Pa.s}$, $\eta_\infty = 2.6\text{mPa.s}$, $K = 1.5\text{s}$ and $k = 0.6\text{s}$) est illustré sur la Figure 38.

Une alternative au modèle de Cross est celui proposé par Carreau (1972)

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \frac{1}{(1 + (K\dot{\gamma})^2)^{k/2}}. \quad (414)$$

Sur les graphiques log-log de viscosité en fonction du taux de cisaillement, il est typ-

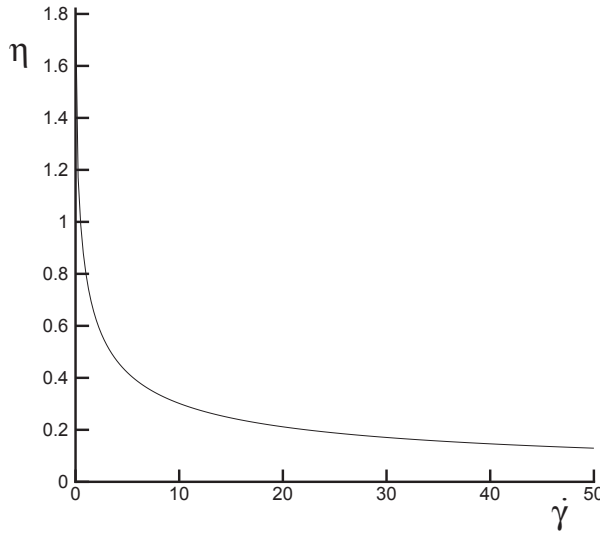


Figure 38: Graphique de η du modèle Cross (413) contre $\dot{\gamma}$

ique d'avoir une région linéaire entre les valeurs de taux de cisaillement faibles et élevées. Cette région suivant une "loi-puissance" peut être modélisée par l'expression suivante:

$$\eta = m\dot{\gamma}^{n-1}, \quad (415)$$

où m et n sont des constantes, n étant choisi inférieur à 1 pour un modèle pseudoplastique. Le modèle de loi-puissance donné par (415) a été décrit par Ostwald (1923) et de Waele (1925) et est utilisé de façon empirique dans l'industrie. On note que, par une simple re-écriture de (413), définissant le modèle de Cross

$$\begin{aligned} \frac{\eta_0 - \eta}{\eta - \eta_\infty} &= (K\dot{\gamma})^k, \\ \Rightarrow \frac{\eta_0(1 - \eta/\eta_0)}{\eta(1 - \eta_\infty/\eta)} &= (K\dot{\gamma})^k, \end{aligned} \quad (416)$$

tel que pour $\eta/\eta_0 \approx \eta_\infty/\eta$ (η étant la moyenne géométrique de η_∞ et η_0), on a l'approximation

$$\frac{\eta}{\eta_0} = (K\dot{\gamma})^{-k}, \quad (417)$$

qui est équivalente à (415) avec $m = \eta_0 K^{-k}$ et $k = 1 - n$.

Tous les fluides non-newtoniens ne présentent pas nécessairement une caractère pseudoplastique pour un écoulement simple de cisaillement en régime stationnaire.

Les fluides dits de Boger ont plus ou moins une viscosité de cisaillement constante sur une grande échelle de taux de cisaillement et quelques fluides s'épaissent dans le même type d'écoulement (par exemple des mélanges de farine de maïs) sont tels que la viscosité de cisaillement augmente avec le taux de cisaillement. L'équation (412) reliant la contrainte de cisaillement σ au taux de déformation $\dot{\gamma}_{xy}$ est indépendante du temps et ne peut pas être utilisée pour décrire la plupart des fluides. Par exemple, dans un fluide *thixotropique*, il y a une cassure de la structure du matériau avec le taux de cisaillement tel que pour des conditions de taux de cisaillement constants on observe une décroissance de la viscosité en temps. L'effet est souvent réversible, de sorte que si le matériau est laissé libre après la déformation, un fluide thixotropique regagnera sa viscosité initiale. L'effet opposé est observé pour les fluides dits *rhéopectiques* ou *anti-thixotropiques* où les forces de cisaillement induisent la formation de structures et la viscosité augmentera avec le temps sous les conditions de cisaillement constantes, et se décroissent graduellement après.

8.4 Écoulement de Poiseuille pour un fluide pseudoplastique (loi-puissance)

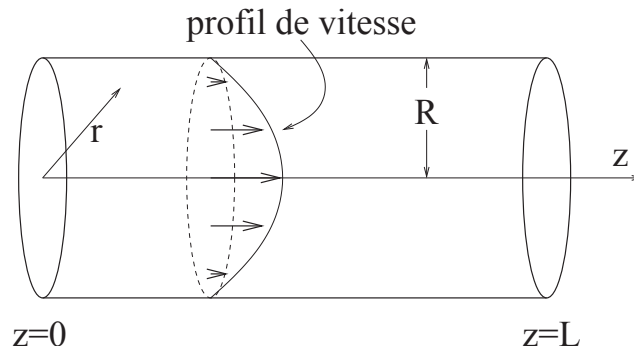


Figure 39: Écoulement de Poiseuille pour un fluide pseudoplastique loi-puissance.

Considérons l'écoulement d'un fluide newtonien généralisé avec une viscosité suivant une loi-puissance:

$$\mathbf{T} = m\dot{\gamma}^{n-1}\dot{\gamma}, \quad (418)$$

(voir (415)) dans un tube droit de longueur L et de rayon R , comme illustré sur la Figure 39. On note la pression p en $z = 0$ par P_0 et en $z = L$ par P_L et on suppose que $P_0 > P_L$. Prenant les coordonnées cylindriques, comme indiquées, on suppose une solution de la forme

$$v_r = 0, \quad v_\theta = 0, \quad v_z = v_z(r). \quad (419)$$

Donc

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{rz} \\ T_{\theta r} & T_{\theta\theta} & T_{\theta z} \\ T_{zr} & T_{z\theta} & T_{zz} \end{pmatrix} = \eta(\dot{\gamma}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & v'_z \\ 0 & 0 & 0 \\ v'_z & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (420)$$

8.4.1 Deux applications

1. Ecoulement dans un tube légèrement conique.

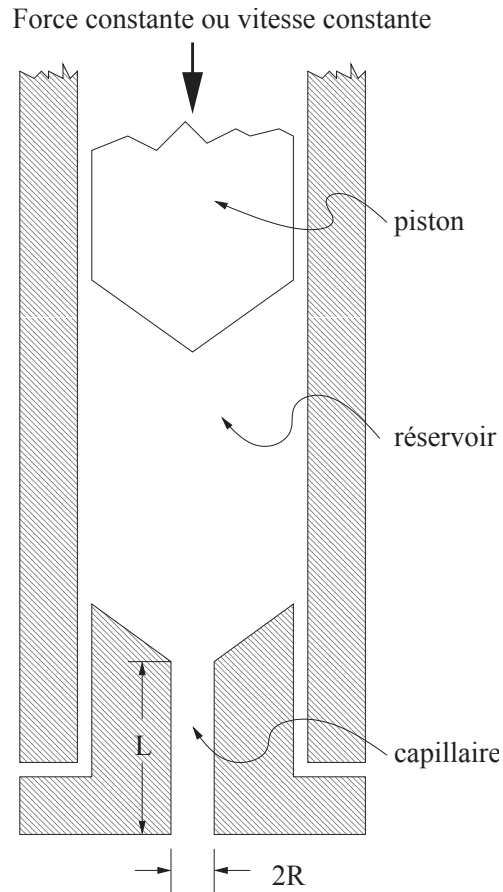


Figure 40: Géométrie d'un viscosimètre capillaire.

2. Viscosimètre capillaire

On considère l'écoulement d'un fluide non-newtonien (qui n'est pas forcément un fluide newtonien généralisé) dans le tube droit de longueur L et de rayon R d'un viscosimètre capillaire, comme montré sur la Figure 40. En notant T_R la contrainte de cisaillement sur la paroi du tube capillaire, et en utilisant la même notation que sur la Figure 39, on peut écrire

$$T_{rz} = \frac{r}{R} T_R,$$

où

$$T_R = \frac{(P_L - P_0)R}{2L} < 0.$$

8.5 Tout s'écoule

La *rhéologie* est la science qui tient compte de l'écoulement et la déformation des matériaux soumis à des forces mécaniques quelconques. Le Professeur E.C. Bingham du College Lafayette, Indiana, a introduit le terme "rhéologie" dans les années 1920 après consultation du Professeur de langues classiques à Lafayette (le mot $\rho\epsilon\omicron\varsigma$ veut dire "courant" [3]) et a pris comme devise la phrase de Heraclitus $\pi\alpha\nu\tau\alpha \rho\epsilon\iota$: "tout s'écoule" [2] - une devise qui a été ainsi adoptée par la Société de Rhéologie. Le verset des Juges 5:5 de l'ancien testament de la Bible peut donner une idée de ce que $\pi\alpha\nu\tau\alpha \rho\epsilon\iota$ veut dire. La prophète Debora y a dit que

"Les montagnes se liquéfient devant Dieu."

Comme démontré par Reiner [2] deux faits peuvent être déduits de ce verset. Premièrement, les montagnes se sont "écoulées". Ceci peut être surprenant: on est habitué à voir des fluides tel que l'eau s'écouler, mais certainement pas des montagnes! L'explication se trouve dans la deuxième partie de notre exégèse de Juges 5 verset 5. Les montagnes se sont écoulés *devant Dieu*. L'échelle de temps de Dieu n'est pas la nôtre. La durée de vie de l'être humain n'est pas assez étendue pour voir les montagnes s'écouler, mais elles s'écoulaient néanmoins! On peut en déduire que la distinction entre solide et fluide n'est pas aussi nette qu'on peut le penser. Pour comprendre le comportement des matériaux comme celui des solides ou celui des fluides, il est utile à ce point d'introduire le *temps de relaxation* et le *temps de ralentissement* d'un matériau.

On commence par considérer deux cas extrêmes: un solide élastique hookéen et un fluide newtonien. Considérons premièrement le mouvement unidimensionnel de cisaillement simple d'un solide linéaire hookéen qui occupe au temps $t = T < 0$, le domaine

$$\Omega = \{(x, y, z) : -\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq d, -\infty < z < \infty\}, \quad (421)$$

en équilibre, indiqué sur Figure 41. Supposons que la section rectangulaire $OABC$ dans un plan z constant subit une petite déformation tel que au temps $t = t' > 0$ le rectangle devienne un parallélogramme $OAB'C'$ avec un angle $\widehat{C'OC}$ noté par $\theta(t')$, indépendant des coordonnées x , y et z . Considérons une particule matérielle avec des coordonnées eulériennes $(x(t'), y(t'), z(t')) = (x(t'), y(T), z(T))$. Donc on peut définir un gradient de déformation $\gamma_{xy}(T, t')$ relatif par

$$\gamma_{xy}(T, t') = \frac{x(t') - x(T)}{y(t')} = \tan \theta(t') \approx \theta(t'),$$

pour θ petit. Donc on peut considérer θ comme un gradient de déformation relatif, et en utilisant la loi de Hooke, la relation entre la contrainte de cisaillement σ_{xy} et la déformation θ est

$$\sigma_{xy}(t) = G\theta(t), \quad (422)$$

où G est le module de rigidité du matériau.

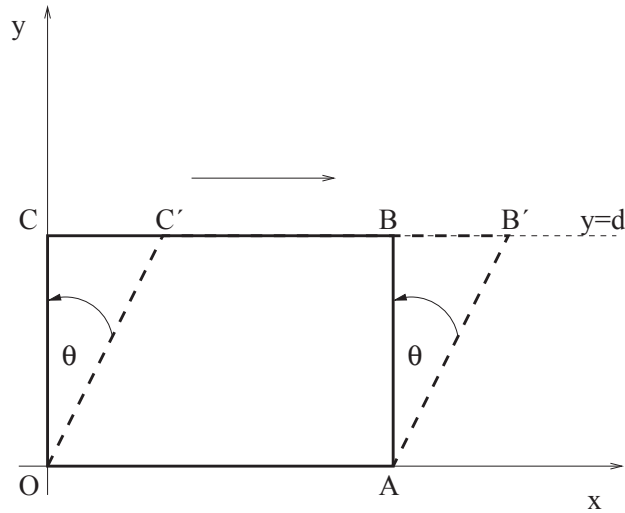


Figure 41: Déformation d'un matériau élastique OABC

Si la déformation θ suit une fonction de Heaviside donnée par

$$\theta = \theta_0 H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \theta_0/2 & t = 0, \\ \theta_0 & t > 0, \end{cases} \quad (423)$$

comme indiqué sur la Figure 42, on déduit de (422) que l'évolution temporelle de la contrainte correspondante est donnée par

$$\sigma_{xy} = G\theta_0 H(t). \quad (424)$$

Le graphe correspondant est visible sur la Figure 43. Réciproquement, si une contrainte quelconque σ_{xy} est appliquée, la déformation θ peut être déterminée par l'équation (422).

8.5.1 Le modèle de Maxwell et le temps de relaxation.

Supposons maintenant qu'un fluide newtonien occupe la région Ω entre les deux plans $y = 0$ et $y = d$ et que le matériau subit le même mouvement qu'auparavant. Selon l'hypothèse de Newton, la contrainte de cisaillement est donné par

$$\sigma_{xy}(t) = \eta \dot{\gamma}_{xy}(t), \quad (425)$$

où η est la viscosité constante. $\dot{\gamma}_{xy}(t)$, le taux de déformation au temps t , est défini par

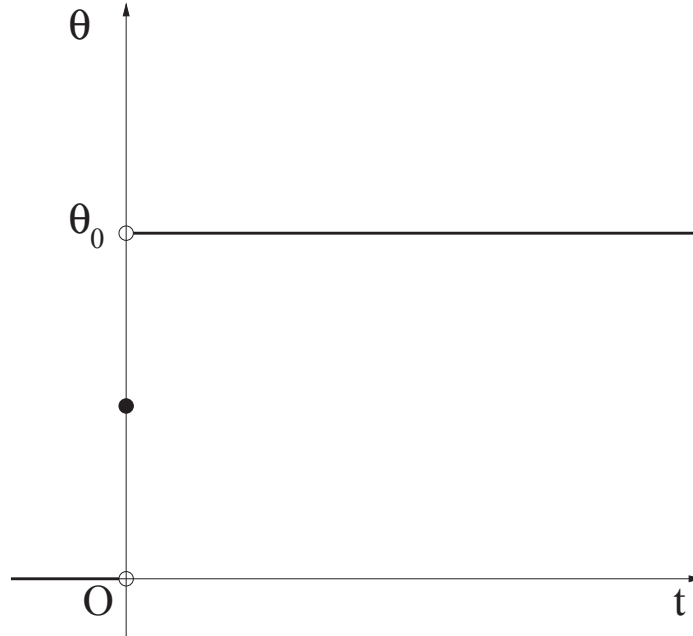


Figure 42: La déformation $\theta = \theta_0 H(t)$

$$\dot{\gamma}_{xy}(t) = \frac{d}{dt} \gamma_{xy}(T, t) = \dot{\theta}(t). \quad (426)$$

L'équation (425) mène à la conclusion suivante: si le fluide subit une déformation donnée par (423) alors la contrainte de cisaillement $\sigma_{xy}(t)$ doit être une fonction de Dirac centrée en $t = 0$,

$$\sigma_{xy} = \eta \theta_0 \delta(t). \quad (427)$$

Le temps de relaxation peut être provisoirement défini comme une mesure du temps requis pour que la contrainte de cisaillement σ_{xy} dans l'écoulement simple et de cisaillement décrit auparavant s'annule sous une déformation constante. Nous pouvons voir que la contrainte de cisaillement dans le cas d'un solide élastique linéaire et hookéen ne s'annulera jamais avec une déformation constante non-nulle. Donc on prend le temps de relaxation comme étant infini. Pour un fluide newtonien, la contrainte se relaxe immédiatement et donc le temps de relaxation est nul. Dans la pratique, les temps de relaxation qui sont infinis ou nuls ne sont pas réalisables: ils correspondent aux modèles mathématiques d'un solide hookéen et un fluide newtonien. En pratique, la relaxation de la contrainte après une déformation constante comme dans (423) se fait sur un intervalle de temps fini et non nul. Ceci est la définition caractéristique

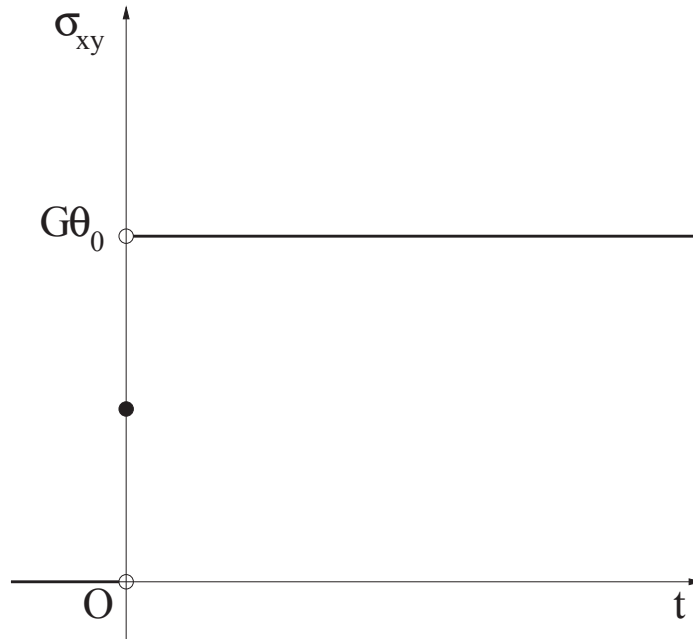


Figure 43: La contrainte $\sigma_{xy} = G\theta_0 H(t)$

d'un matériau viscoélastique. Pour illustrer ce comportement, on suppose qu'on a un matériau viscoélastique subissant un cisaillement simple comme dans les exemples précédents où, au lieu de (422) ou (425), on a la relation suivante entre la contrainte de cisaillement et le taux de déformation (modèle de Maxwell):

$$\frac{1}{G} \frac{d\sigma_{xy}}{dt} + \frac{1}{\eta} \sigma_{xy} = \dot{\gamma}_{xy}(t). \quad (428)$$

On identifie la constante λ_1 comme étant le temps de relaxation et dans cet exemple, c'est le temps que met la contrainte de cisaillement d'un matériau viscoélastique (qui obéit au model Maxwell) pour réduire sa valeur initiale $G\theta_0$ d'un facteur e^{-1} . Le temps de relaxation de l'eau est à peu près 10^{-12} s, celui d'un polyethylene à faible densité 10s et celui du verre plus de 28 heures! En pratique, beaucoup de matériaux présentent un relâchement de leur contrainte en réponse à une déformation du type décrit dans le paragraphe précédent. Le fait qu'un matériau donné ait un temps de relaxation ne signifie pas nécessairement qu'il va se comporter comme on peut s'y attendre. D'où le phénomène inattendu d'"écoulement" des montagnes. Ce qui importe vraiment pour caractériser le comportement des matériaux est le rapport du temps de relaxation (λ_1) du matériau et du temps caractéristique d'observation du processus d'écoulement (T_o , par exemple). Reiner [2] a introduit ce rapport comme étant le nombre de Deborah De défini par

$$De = \frac{\lambda_1}{T_o}. \quad (429)$$

De est nul pour un fluide newtonien, et est infini pour un solide élastique hookéen. Mais il doit être clair d'après la définition (429) qu'en général les matériaux n'ont pas de nombre de Deborah associé: un matériau avec un temps de relaxation non nul peut se comporter comme un solide si le temps caractéristique T_o du processus d'écoulement est petit (De grand). Réciproquement, un matériau qui sur une période de temps courte nous apparaît comme un solide peut s'écouler si T_o est suffisamment large (De petit). Un exemple de matériau dont le comportement peut ressembler à un fluide ou un solide est donné par Barnes *et al.* [1]. "Bouncing putty" est un matériau à base de silicone qui, s'il est laissé dans un récipient pendant un temps assez long, va retrouver sa position de repos - caractéristique d'un fluide. D'autre part, si une boule de ce matériau est sujette à une déformation soudaine en étant frappée sur une surface dure, elle peut aussi rebondir - caractéristique d'un solide. Une montagne a incontestablement un temps de relaxation très long. Mais si vous êtes prêt à attendre assez longtemps, vous la verrez s'écouler.

References

- [1] H. A. Barnes, J. F. Hutton, and K. Walters. *An Introduction to Rheology*. Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1989.
- [2] M. Reiner. The Deborah number. *Physics Today*, 17:62, 1964.
- [3] D. Thompson, editor. *The Concise Oxford Dictionary of Current English*. Oxford University Press, Oxford, 1996.