

Figure 24: Le volume matériel $V(t)$.

5 Les Équations de Navier-Stokes

5.1 Vecteur contrainte

Supposons qu'un ensemble de particules de fluide occupe un volume $V(t)$ ayant pour frontière fermée $S(t)$ avec comme vecteur normal unitaire \mathbf{n} , comme indiqué sur la figure 24. Nous avons vu dans §2 que pour un fluide idéal la force exercée sur un élément de surface d'une superficie δS dans le fluide est

$$\pm p n \delta S. \quad (182)$$

Maintenant on voudrait considérer un fluide plus générale qu'un fluide idéal. Dans cette optique considérons un petit élément de surface A ayant vecteur position \mathbf{x} et de superficie δS . On définit le vecteur contrainte $\mathbf{s}_n(\mathbf{x}, t)$ en imposant que la force exercée au temps t sur l'élément A par le fluide à l'extérieur de $V(t)$ est $\mathbf{s}_n \delta S$.

La force totale sur toute la surface S est alors

$$\int_{S(t)} \mathbf{s}_n dS, \quad (183)$$

et la force totale subie par le fluide qui occupe $V(t)$ va être

$$\int_{S(t)} \mathbf{s}_n dS + \int_{V(t)} \rho \mathbf{g} dV, \quad (184)$$

où \mathbf{g} désigne une force par unité de masse.

5.1.1 Conservation de la quantité de mouvement (Euler 1752)

La conservation de la quantité de mouvement (voir §2.1.3) donne

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV = \int_{S(t)} \mathbf{s}_n(\mathbf{x}, t) dS + \int_{V(t)} \rho \mathbf{g} dV. \quad (185)$$

En faisant passer la dérivée temporelle du membre de gauche de (185) dans l'intégrale par le théorème du transport de Reynolds, et en utilisant l'équation de conservation de la masse (23), on a

$$\int_{V(t)} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV = \int_{S(t)} \mathbf{s}_n(\mathbf{x}, t) dS + \int_{V(t)} \rho \mathbf{g} dV. \quad (186)$$

5.1.2 Conservation du moment

Une autre loi de la mécanique due à Euler (1755) stipule le principe de conservation du moment. En appliquant cette loi au volume $V(t)$ on obtient, en supposant que le couple est seulement dû à la contrainte \mathbf{s}_n et à la force massique \mathbf{g} ,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}) dV = \int_{S(t)} (\mathbf{x} \times \mathbf{s}_n) dS + \int_{V(t)} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{g}) dV. \quad (187)$$

En utilisant à nouveau le théorème de transport de Reynolds qui nous permet de transférer la dérivée matérielle à l'intérieur de l'intégrale du membre de gauche, et en utilisant (23) on obtient

$$\int_{V(t)} \left(\mathbf{x} \times \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) dV = \int_{S(t)} (\mathbf{x} \times \mathbf{s}_n) dS + \int_{V(t)} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{g}) dV. \quad (188)$$

5.2 Le tenseur des contraintes (Cauchy 1822)

Les lois d'Euler appliquées à un fluide conduit aux équations (186) et (188). Nous allons tout d'abord utiliser les équations (186) et (188) pour démontrer l'existence d'un tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ ayant la propriété suivante:

$$\mathbf{s}_n(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n},$$

et ensuite la symétrie du tenseur des contraintes.

Théorème

Soit \mathcal{D} une région fermée et bornée de \mathbb{R}^3 et $\mathbf{s}_n(\mathbf{x}, t)$ le vecteur contrainte introduit ci-dessus et défini dans \mathcal{D} . Alors il existe un tenseur de second ordre $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ tel que dans \mathcal{D} on ait:

$$\text{i. } \mathbf{s}_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n},$$

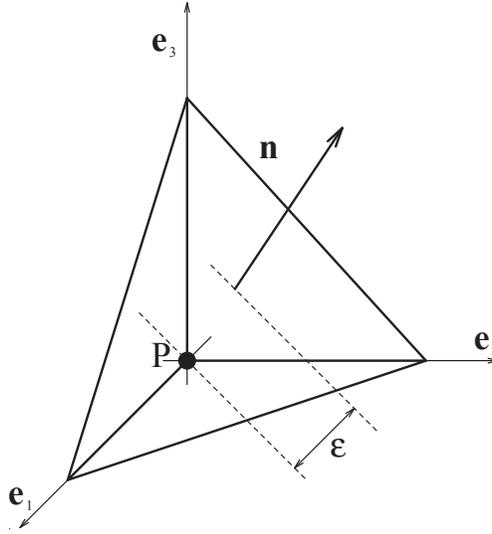


Figure 25: Le tétraèdre \mathcal{T}_ε .

ii.

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g},$$

iii. $\boldsymbol{\sigma}$ est symétrique.

Démonstration.

(i) On fixe un point quelconque P du fluide au temps t . Ensuite, on prend un repère fixe ayant pour origine P et d'axes de coordonnées les vecteurs orthonormaux \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 , comme indiqué sur la Figure 25. Puis on écrit que $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$ et on suppose que $n_1 n_2 n_3 \neq 0$. On considère qu'une famille infinie de tétraèdres $\{\mathcal{T}_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ est telle que pour tout $\varepsilon > 0$, \mathcal{T}_ε est une partie de \mathbb{R}^3 bornée par les trois plans \mathcal{P}_i passant par P et ayant vecteurs normaux $-\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$) et le plan dont l'équation vectorielle est

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = \varepsilon. \quad (189)$$

Le plan décrit par l'équation (189) est simplement le plan distant ε de P dans la direction de \mathbf{n} . On numérote les faces du tétraèdre ayant comme vecteur normal $-\mathbf{e}_i$ par \mathcal{P}_i , ($i = 1, 2, 3$) et la superficie de ces surfaces A_i . Le plan défini par (189) est nommé \mathcal{P}_n et a une superficie A_n . Alors, il est facile de montrer que

$$A_1 = \frac{\varepsilon^2}{2n_2 n_3}, A_2 = \frac{\varepsilon^2}{2n_1 n_3}, A_3 = \frac{\varepsilon^2}{2n_1 n_2} \text{ et } A_n = \frac{\varepsilon^2}{2n_1 n_2 n_3}, \quad (190)$$

tel que

$$A_i = n_i A_n, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (191)$$

On prend maintenant $V(t) = \mathcal{T}_\varepsilon$ dans l'équation (186) pour obtenir

$$\int_{\mathcal{T}_\varepsilon} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV = \sum_{k=1}^3 \int_{\mathcal{P}_k} \mathbf{s}_{-e_k}(\mathbf{x}, t) dS + \int_{\mathcal{P}_n} \mathbf{s}_n(\mathbf{x}, t) dS + \int_{\mathcal{T}_\varepsilon} \rho \mathbf{g} dV, \quad (192)$$

et soit c une constante positive choisie telle que pour $E > 0$ fini et quel que soit $0 < \varepsilon < E$ on a

$$\left| \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \rho \mathbf{g} \right| < c, \quad (193)$$

pour tout point dans \mathcal{T}_ε . Par conséquent, (192) donne l'inégalité

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^3 \int_{\mathcal{P}_k} \mathbf{s}_{-e_k}(\mathbf{x}, t) dS + \int_{\mathcal{P}_n} \mathbf{s}_n(\mathbf{x}, t) dS \right| &< c \frac{\varepsilon^3}{6n_1 n_2 n_3} \\ &= \frac{1}{3} c A_n \varepsilon. \end{aligned} \quad (194)$$

En divisant le tout par A_n et en utilisant l'identité (191), on obtient

$$\left| \sum_{k=1}^3 \frac{n_k}{A_k} \int_{\mathcal{P}_k} \mathbf{s}_{-e_k}(\mathbf{x}, t) dS + \frac{1}{A_n} \int_{\mathcal{P}_n} \mathbf{s}_n(\mathbf{x}, t) dS \right| < \frac{1}{3} c \varepsilon. \quad (195)$$

En faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$

$$- \sum_{k=1}^3 n_k \mathbf{s}_{-e_k}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{s}_n(\mathbf{0}, t). \quad (196)$$

En définissant le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ ayant pour composante $(i, k) - (\mathbf{s}_{-e_k})_i$, on voit qu'au point P

$$(\mathbf{s}_n)_i = \sum_{k=1}^3 \sigma_{ik} n_k, \quad (197)$$

comme requis. ■

(ii) À partir de (186), en remplaçant \mathbf{s}_n par $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$, on a

$$\int_{V(t)} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV = \int_{S(t)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{V(t)} \rho \mathbf{g} dV, \quad (198)$$

et en utilisant le théorème de la divergence sur la première intégrale du membre de droite, on obtient

$$\int_{V(t)} \left(\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{g} \right) dV = 0. \quad (199)$$

Cette égalité étant vraie pour tout volume V , on a

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}, \quad (200)$$

comme requis et ayant supposé que la fonction à intégrer dans (199) était continue. ■

(iii) On substitue $s_n = \sigma \cdot n$ dans la k ième composante de (188) pour voir que

$$\int_{V(t)} \varepsilon_{kji} x_j \rho \frac{Dv_i}{Dt} dV = \int_{S(t)} \varepsilon_{kji} x_j \sigma_{il} n_l dS + \int_{V(t)} \varepsilon_{kji} x_j \rho g_i dV, \quad (201)$$

où ε est un tenseur de permutation d'ordre 3 défini par

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si 2 ou plus des indices } i, j, k \text{ sont égaux,} \\ 1 & \text{si } i, j, k \text{ est une permutation paire des nombres } 1, 2, 3, \\ -1 & \text{si } i, j, k \text{ est une permutation impaire des nombres } 1, 2, 3, \end{cases} \quad (202)$$

En appliquant le théorème de la divergence au premier terme du membre de droite de l'équation (201), on a

$$\begin{aligned} & \int_{V(t)} \varepsilon_{kji} \left(x_j \rho \frac{Dv_i}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_l} (x_j \sigma_{il}) - x_j \rho g_i \right) dV = 0, \\ \Rightarrow & \int_{V(t)} \varepsilon_{kji} x_j \left(\rho \frac{Dv_i}{Dt} - \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} - \rho g_i \right) dV - \int_{V(t)} \varepsilon_{kji} \frac{\partial x_j}{\partial x_l} \sigma_{il} dV = 0, \end{aligned} \quad (203)$$

$$\Rightarrow \int_{V(t)} \varepsilon_{kji} \sigma_{ij} dV = 0, \quad (204)$$

car la fonction dans la première intégrale de (203) est identiquement nulle d'après (200) et $\frac{\partial x_j}{\partial x_l} = \delta_{jl}$, (symbole de Kronecker delta). Par les mêmes arguments que d'habitude, (204) implique que

$$\varepsilon_{kji} \sigma_{ij} = 0, \quad (205)$$

et d'après la définition de ε , on conclut que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$, donc σ est symétrique. ■

5.3 Tenseurs

5.3.1 Rotation des Axes.

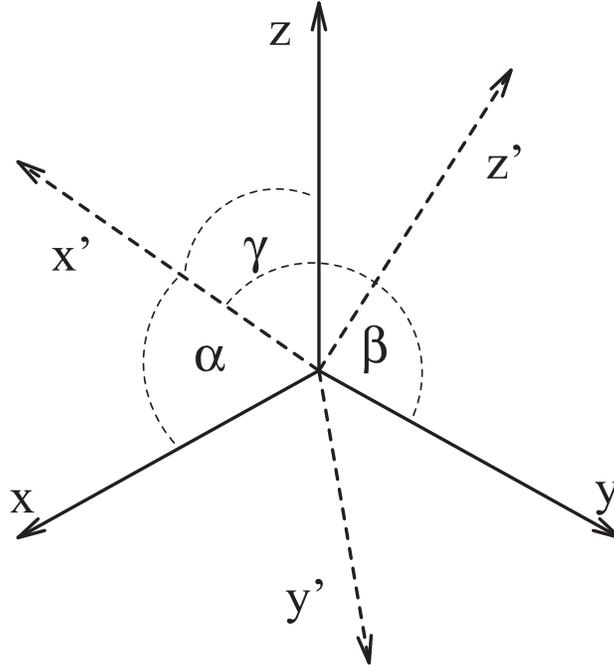


Figure 26: Les systèmes de coordonnées $Oxyz$ et $Ox'y'z'$.

Considérons deux systèmes de coordonnées cartésiennes d'axes $Oxyz$ et $Ox'y'z'$ comme indiqués sur la Figure 26. On appelle α , β , γ les angles que l'axe x' fait respectivement avec les axes x , y et z . Les cosinus directeurs correspondants sont donnés par les cosinus de ces angles et on les note l_{11} , l_{12} et l_{13} .

Il découle de principes élémentaires de géométrie que

$$l_{11}^2 + l_{12}^2 + l_{13}^2 = 1. \quad (206)$$

Les autres cosinus directeurs relatifs aux axes de y' et z' sont notés de manière analogue et on aboutit au tableau des cosinus directeurs suivant:

| O | x | y | z |
|------|----------|----------|----------|
| x' | l_{11} | l_{12} | l_{13} |
| y' | l_{21} | l_{22} | l_{23} |
| z' | l_{31} | l_{32} | l_{33} |

On peut voir que les cosinus directeurs relatifs à l'axe x apparaissent dans la première colonne, ceux de l'axe y dans la deuxième et ceux de l'axe z dans la troisième colonne.

Puisque les axes Ox' , Oy' et Oz' sont perpendiculaires entre eux on a

$$\sum_{j=1}^3 l_{rj}l_{sj} = \delta_{rs} \quad (207)$$

et de même, en considérant les axes Ox , Oy et Oz , on a

$$\sum_{r=1}^3 l_{ri}l_{rj} = \delta_{ij}. \quad (208)$$

5.3.2 Tenseurs cartésiens.

Soit \mathbf{A} une quantité mathématique ou physique qui, lorsque associée à un système de coordonnées cartésiennes x_1, x_2, x_3 , peut être représentée par une famille de 3^n scalaires $a_{ij\dots}$, où il y a n suffixes attachés à a . Chacun des suffixes prend une des valeurs 1, 2 ou 3. Soit $a'_{rs\dots}$ une famille de scalaires représentant \mathbf{A} dans le repère Ox'_1, x'_2, x'_3 , et supposez que

$$a'_{rs\dots} = l_{ri}l_{sj} \dots a_{ij\dots}. \quad (209)$$

Si les scalaires représentant \mathbf{A} sont invariants par translation des axes, \mathbf{A} est appelé une *tenseur cartésien d'ordre n* . On note que selon (209), \mathbf{A} est un tenseur cartésien si

$$a'_{rs\dots} = \frac{\partial x'_r}{\partial x_i} \frac{\partial x'_s}{\partial x_j} \dots a_{ij\dots}, \quad (\text{tenseur contravariant}), \quad (210)$$

ou bien

$$a'_{rs\dots} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \frac{\partial x_j}{\partial x'_s} \dots a_{ij\dots}, \quad (\text{tenseur covariant}), \quad (211)$$

les deux règles de transformation des tenseurs ci-dessus étant les mêmes pour les tenseurs cartésiens.

Dans le cas $n = 2$, (209) veut dire qu'avec un changement orthogonal de coordonnées

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{c}, \quad \text{où } Q_{ij} = l_{ij}, \quad (212)$$

\mathbf{A} est un tenseur cartésien du second ordre si elle se transforme selon

$$\mathbf{A}' = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T. \quad (213)$$

5.3.3 Tenseurs isotropes

Un tenseur cartésien est dit *isotrope* si toutes ses composantes restent inchangées dans tout système de coordonnées cartésiennes.

Tenseurs du second ordre

Soit U un tenseur isotrope du second ordre. Donc

$$u_{pq} = l_{pi}l_{qj}u_{ij}. \quad (214)$$

On considère premièrement une rotation de π autour de l'axe Ox_3 . Pour cette rotation,

$$l_{11} = l_{22} = -1, l_{33} = 1, \text{ et } l_{ij} = 0, \text{ autrement,} \quad (215)$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} u_{13} &= l_{1i}l_{3j}u_{ij} = l_{11}l_{33}u_{13} = -u_{13}, \\ \Rightarrow u_{13} &= 0. \end{aligned} \quad (216)$$

De la même manière

$$\begin{aligned} u_{23} &= l_{2i}l_{3j}u_{ij} = l_{22}l_{33}u_{23} = -u_{23}, \\ \Rightarrow u_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (217)$$

En prenant des rotations de π autour des axes Ox_1 et Ox_2 en obtiendra $u_{21} = u_{31} = u_{12} = u_{32} = 0$.

Une rotation de $\pi/2$ autour de l'axe Ox_3 a les cosinus directeurs

$$l_{12} = l_{33} = 1, l_{21} = -1, \text{ et } l_{ij} = 0, \text{ autrement.} \quad (218)$$

De la même façon que ci-dessus on obtiendrait immédiatement le résultat $u_{11} = u_{22}$ et en faisant une rotation autour de l'axe Ox_1 on conclut que $u_{11} = u_{22} = u_{33}$ avec $u_{ij} = 0$ autrement.

En conclusion le tenseur isotrope du second ordre le plus général est

$$U = \lambda \delta,$$

où λ est un invariant scalaire.

Tenseurs d'ordre 4

Le tenseur isotrope du quatrième ordre U le plus général est

$$u_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{km} + \mu \delta_{ik} \delta_{jm} + \nu \delta_{im} \delta_{jk},$$

où λ , μ et ν sont des invariants scalaires.

Définition: Fonction tensorielle isotrope

Soit \mathbf{A} et \mathbf{B} des tenseurs du second ordre dont les composantes relatives aux axes $Ox_1x_2x_3$ sont a_{km} et b_{ij} , respectivement. Supposons que chacune des composantes de \mathbf{B} soit en fonction des composantes de \mathbf{A} . Écrivons la relation entre les composantes de \mathbf{B} et de \mathbf{A} sous la forme

$$b_{ij} = F_{ij}(a_{km}). \quad (219)$$

Relatives aux nouveaux axes $Ox'_1x'_2x'_3$, supposons que les composantes de \mathbf{A} et \mathbf{B} soient a'_{km} et b'_{ij} , respectivement, et que maintenant

$$b'_{ij} = F_{ij}(a'_{km}). \quad (220)$$

La relation entre les composantes de \mathbf{B} et de \mathbf{A} est donc invariante sous une rotation des axes, et nous disons que \mathbf{B} est une fonction isotrope de \mathbf{A} .

5.4 Le fluide newtonien.

Pour dériver une forme explicite du tenseur des contraintes, on écrit

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}, \quad (221)$$

où p est la pression et \mathbf{T} est appelé le tenseur des extra-tensions ou le déviateur des contraintes. La forme fonctionnelle de \mathbf{T} peut être déduite des trois hypothèses suivantes:

1. \mathbf{T} est une fonction linéaire du gradient de la vitesse $\nabla\mathbf{v}$,
2. $\mathbf{T} = \mathbf{0}$ lorsqu'il n'y a pas de déformation des éléments du fluide,
3. la relation entre \mathbf{T} et le gradient de la vitesse $\nabla\mathbf{v}$ est isotrope, c'est à dire, identique pour tout repère cartésien rectangulaire, telle que le déviateur des contraintes engendré dans un élément de fluide est indépendant de l'orientation de l'élément.

Des deux premières hypothèses on peut écrire

$$\begin{aligned} T_{ij} &= A_{ijkl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l}, \\ &= \frac{1}{2} A_{ijkl} \dot{\gamma}_{kl} - \frac{1}{2} A_{ijkl} \Omega_{kl}, \end{aligned} \quad (222)$$

où \mathbf{A} est un tenseur de quatrième ordre et les tenseurs $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ et $\boldsymbol{\Omega}$ sont définis, respectivement, comme suit:

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T, \quad (\text{tenseur de vitesse de déformation ou des taux de déformation}), \quad (223)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla\mathbf{v}^T - \nabla\mathbf{v}. \quad (224)$$

De la troisième hypothèse on constate qu'il faut utiliser un tenseur \mathbf{A} isotrope, dont la forme la plus générale (voir feuilles séparées) est en fonction des tenseurs delta:

$$A_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \eta \delta_{ik} \delta_{jl} + \nu \delta_{il} \delta_{jk}, \quad (225)$$

où λ , η et ν sont des coefficients scalaires. Puisque \mathbf{T} est symétrique, \mathbf{A} doit être symétrique dans ses deux premiers indices et par conséquent $\nu = \eta$. Mais on observe de (225) que \mathbf{A} est aussi symétrique par rapport à ses deux derniers indices k et l qui nécessite (rappelant que le tenseur $\boldsymbol{\Omega}$ est anti-symétrique) que le deuxième terme du membre de droite de (222) est nul. En tenant compte des remarques faites ci-dessus on peut écrire

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \frac{\lambda}{2} \delta_{ij} \delta_{kl} \dot{\gamma}_{kl} + \frac{\eta}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \dot{\gamma}_{kl}, \\ &= \frac{\lambda}{2} \delta_{ij} \dot{\gamma}_{kk} + \eta \dot{\gamma}_{ij}. \end{aligned} \quad (226)$$

On note que $\dot{\gamma}_{kk} = 2\nabla \cdot v$, de sorte que pour un fluide incompressible

$$T = \eta \dot{\gamma}, \quad (227)$$

où la constante η maintenant désigne la *viscosité* du fluide.

On note aussi que pour un fluide incompressible la pression s'exprime par la valeur moyenne des contraintes normales:

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}). \quad (228)$$

Considérons ensuite le tenseur $\dot{\gamma}$ pour un écoulement bidimensionnel. Selon la figure il apparaît que, pendant l'intervalle de temps δt , l'élongation du côté AB de la particule dans la direction e_1 est égale à

$$(v_1(x_1 + \delta x_1) - v_1(x_1))\delta t \approx \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \delta x_1 \delta t. \quad (229)$$

Par conséquent, le taux d'élongation dans la direction e_1 devient $\partial v_1/\partial x_1$. De la même manière on voit que $\partial v_2/\partial x_2$ représente le taux d'élongation du côté AC dans la direction e_2 . Ces termes correspondent aux éléments diagonaux du tenseur $\dot{\gamma}$. En ce qui concerne les termes non diagonaux, on voit d'après la figure que, pendant l'intervalle de temps δt , les deux côtés de la particule centrés au point A ont accompli une rotation $\delta\alpha$ et $\delta\beta$ dans le même sens. Ces rotations correspondent donc à une déformation par cisaillement de la particule. Cependant, les angles $\delta\alpha$ et $\delta\beta$ sont exprimés par

$$\begin{aligned} \delta\alpha &\approx \tan \delta\alpha = \frac{\frac{\partial v_2}{\partial x_1} \delta x_1 \delta t + \dots}{\delta x_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \delta x_1 \delta t + \dots} \approx \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \delta t \\ \delta\beta &\approx -\frac{\partial v_1}{\partial x_2} \delta t \end{aligned} \quad (230)$$

Il s'en suit que le taux de déformation par cisaillement s'exprime dans le plan x_1x_2 par

$$(\delta\alpha - \delta\beta)(\delta t)^{-1} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}. \quad (231)$$

La somme des deux termes diagonaux a aussi une signification physique. Puisque $\partial v_1/\partial x_1$ représente le taux d'élongation dans la direction e_1 , la longueur de la particule dans cette même direction devient, après un intervalle de temps δt , $\delta x_1(1 + \partial v_1/\partial x_1 \delta t + \dots)$ (projection de la distance AB sur l'axe x_1). Par conséquent, la superficie de la particule après δt est égal à

$$\begin{aligned} &\delta x_1(1 + \partial v_1/\partial x_1 \delta t + \dots)\delta x_2(1 + \partial v_2/\partial x_2 \delta t + \dots) \\ &= \delta x_1 \delta x_2(1 + \nabla \cdot v \delta t + O(\delta t)^2) \end{aligned} \quad (232)$$

Le taux de changement de la superficie de la particule est traduite donc par la divergence du vecteur vitesse v .

5.4.1 Les équations de Navier-Stokes

D'après (221) les composantes du tenseur des contraintes σ sont alors données par

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + T_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta\dot{\gamma}_{ij}. \quad (233)$$

Le stage final pour la dérivation de l'équation de mouvement pour un fluide newtonien est d'injecter (233) dans l'équation de mouvement (200) pour obtenir

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_i}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i, \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \rho g_i, \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \rho g_i, \end{aligned} \quad (234)$$

car

$$\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0.$$

On a donc sous forme vectorielle les *équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible*:

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (235)$$

5.5 Diffusion du rotationnel de la vitesse dans un écoulement visqueux

L'équation de la quantité de mouvement d'un fluide visqueux peut être écrite sous la forme

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}, \quad (236)$$

où nous avons utilisé l'identité (A.9) de Acheson. En calculant le produit vectoriel entre ∇ et (236) on obtient pour un fluide incompressible (voir §3.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) &= \nu \nabla \times \nabla^2 \mathbf{v}, \\ \Rightarrow \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= \nu \nabla \times \nabla^2 \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (237)$$

En utilisant l'identité (A.10) de Acheson deux fois on voit que

$$\nabla \times \nabla^2 \mathbf{v} = -\nabla \times \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\omega} = \nabla^2 \boldsymbol{\omega}. \quad (238)$$

Donc, pour un fluide incompressible

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}. \quad (239)$$

L'effet de la viscosité est représenté par le deuxième terme du membre de droite, qui exprime la diffusion de $\boldsymbol{\omega}$ dans l'écoulement.

5.5.1 L'écoulement dû au déplacement impulsif d'une plaque plane. (§2.3 d'Acheson.)

On suppose qu'un fluide visqueux occupe la région $0 < y < \infty$ et qu'au temps $t = 0$ la frontière rigide $y = 0$ est soudainement mise en mouvement dans la direction x avec une vitesse constante U . On suppose que le fluide s'écoule sous l'influence du déplacement de la frontière seule (et donc qu'il n'y a pas de gradients de pression externes imposés). On suppose que les pressions en $x = \pm\infty$ sont égales et que $\partial p/\partial x$ est constante, ces hypothèses voulant dire que $\partial p/\partial x = 0$. Il s'en suit que la vitesse $u(y,t)$ satisfait équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (240)$$

la condition initiale

$$u(y,0) = 0, \quad y > 0, \quad (241)$$

et les conditions limites

$$u(0,t) = U, u(\infty,t) = 0, \quad t > 0. \quad (242)$$

On essaiera de trouver une solution "auto-similaire" en cherchant u en fonction d'une seule variable η :

$$u = f(\eta) \text{ où } \eta = \frac{y}{g(t)}, \quad (243)$$

impliquant que le profil de vitesse en temps $t > 0$ sera une version étirée de celui en tout autre temps $t' > 0$. La fonction $g(t)$ est à déterminer. En substituant $u = f(\eta)$, l'équation (240) devient

$$-yg'f' = \nu f''. \quad (244)$$

Donc

$$-yg'/\nu = f''/f', \quad (245)$$

doit être une fonction de η uniquement et puisque y apparaît au membre de gauche de (245) on prend cette fonction égale à $-\eta$. Ainsi

$$-\frac{yg'}{\nu} = -\frac{y}{g}, \quad (246)$$

dont la solution la plus simple est $g = \sqrt{2\nu t}$. L'équation (240) se transforme maintenant en

$$f'' + \eta f' = 0. \quad (247)$$

En intégrant,

$$f' = B \exp(-\eta^2/2), \quad (248)$$

d'où

$$f = A + B \int_0^\eta \exp(-s^2/2) ds, \quad (249)$$

avec A et B des constantes d'intégration. Des conditions limites et initiales on a

$$f(0) = U, \quad f(\infty) = 0, \quad (250)$$

de sorte que

$$u = U \left[1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\eta \exp(-s^2/2) ds \right] \quad (251)$$

Le rotationnel de la vitesse est $\omega \mathbf{k}$ où

$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U}{\sqrt{\pi \nu t}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\nu t}\right), \quad (252)$$

et lorsque $y = 2\sqrt{\nu t}$, ω est amortie à $\exp(-1)$ de sa valeur à la plaque. La dissipation du rotationnel par les forces visqueuses lisse ce qui était, au début, une concentration infinie du rotationnel de la vitesse à la frontière. Autrement dit, le rotationnel se diffuse sur une distance de l'ordre $(\nu t)^{1/2}$ en temps t .

5.6 Le nombre de Reynolds

Le champ d'écoulement d'un fluide est caractérisé par une vitesse U , une longueur caractéristique L , par exemple le diamètre d'un cylindre ou encore la longueur d'un profil, alors qu'un fluide newtonien est décrit par η et ρ . Introduisons dans les équations de Navier-Stokes (235) de nouvelles variables adimensionnelles indépendantes et dépendantes

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}/L, \quad t^* = t/(L/U), \quad \mathbf{v}^* = \mathbf{v}/U, \quad p^* = p/\rho U^2, \quad (253)$$

d'où, négligeant les forces massiques, il découle que

$$\frac{\rho U^2}{L} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \frac{\rho U^2}{L} (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* = -\frac{\rho U^2}{L} \nabla^* p^* + \frac{\eta U}{L^2} \nabla^{*2} \mathbf{v}^*. \quad (254)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* &= -\nabla^* p^* + \frac{\eta}{\rho U L} \nabla^{*2} \mathbf{v}^*, \\ \nabla^* \cdot \mathbf{v}^* &= 0. \end{aligned} \quad (255)$$

La combinaison

$$\frac{\rho U L}{\eta} \equiv Re = \frac{U L}{\nu}, \quad (256)$$

représente le nombre de Reynolds.

L'importance du nombre de Reynolds provient du développement conduisant à (255). L'ordre de grandeur du terme $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ représentant l'accélération d'une particule liée à son inertie, devient U^2/L . De la même façon, l'ordre de grandeur du terme

$\nu \nabla^2 v$, représentant les effets visqueux sur la particule, devient $\nu U/L^2$. Le rapport entre les facteurs U^2/L et $\nu U/L^2$ définit le nombre de Reynolds. Les caractéristiques des écoulements à nombre de Reynolds faible et à nombre de Reynolds élevé sont très différentes.

Il faut mentionner aussi que le comportement d'un fluide d'une petite viscosité (nombre de Reynolds élevé) peut être complètement différent de celui d'un fluide idéal (nombre de Reynolds infini) à cause de la séparation de la couche limite.

5.6.1 Oscillations longitudinales d'un fluide. (§6.3.5 de Ryhming.)

Considérons une plaque plane d'étendue infinie effectuant un mouvement oscillatoire dans son propre plan. À cause de la viscosité du fluide, des oscillations longitudinales sont engendrées dans le fluide au-dessus de la plaque. Dans ce cas, comme dans l'exemple de §5.5.1 $dp/dx = 0$ et $u = u(y,t)$ où y est l'axe vertical. La condition limite pour la plaque plane peut donc s'écrire $u(0,t) = U \exp(i\omega t)$ où U traduit l'amplitude de la vitesse de la plaque et ω la fréquence angulaire des oscillations.

Pour ce problème les équations de Navier-Stokes prennent donc la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (257)$$

On cherche la solution par la méthode de séparation des variables en posant

$$u = f(t)g(y), \quad (258)$$

et on obtient

$$\frac{\dot{f}}{f} = \nu \frac{g''}{g} = k = \text{constante}, \quad (259)$$

d'où

$$\begin{aligned} f &= C_1 \exp(kt), \\ g &= C_2 \exp\left[-y\left(\frac{k}{\nu}\right)^{1/2}\right] + C_3 \exp\left[y\left(\frac{k}{\nu}\right)^{1/2}\right]. \end{aligned} \quad (260)$$

Etant donné que $u \rightarrow 0$ quand $y \rightarrow \infty$, la constante $C_3 = 0$. Par conséquent,

$$u(y,t) = C_1 C_2 \exp\left[kt - y\left(\frac{k}{\nu}\right)^{1/2}\right] \quad (261)$$

Les constantes $C_1 C_2$ et k sont définies par la condition limite à la paroi. On obtient

$$u(0,t) = C_1 C_2 \exp(kt) = U \exp(i\omega t), \quad (262)$$

d'où

$$C_1 C_2 = U \text{ et } k = i\omega. \quad (263)$$

La solution devient donc

$$u(y,t) = U \exp \left[i\omega t - y \left(\frac{i\omega}{\nu} \right)^{1/2} \right], \quad (264)$$

où

$$\left(\frac{i\omega}{\nu} \right)^{1/2} = \left(\frac{\omega}{\nu} \right)^{1/2} \exp \left(\frac{i\pi}{4} \right) = \left(\frac{\omega}{2\nu} \right)^{1/2} (1+i). \quad (265)$$

Par conséquent

$$u(y,t) = U \exp \left[- \left(\frac{\omega}{2\nu} \right)^{1/2} y + i \left(\omega t - \left(\frac{\omega}{2\nu} \right)^{1/2} y \right) \right] \quad (266)$$

Selon cette expression le fluide au-dessus de la plaque effectue un mouvement oscillatoire avec une amplitude qui diminue avec la distance à la plaque. Pour une distance caractéristique $\delta = (2\nu/\omega)^{1/2}$, l'amplitude est amortie à $\exp(-1)$ de sa valeur à la plaque même. Il s'en suit que les oscillations du fluide sont limitées à une couche proche de la plaque. L'épaisseur de cette couche est d'ordre de grandeur δ . Le déplacement L longitudinal qu'effectue la plaque se calcule d'après

$$L = 2U \int_{t=0}^{\pi/2\omega} \cos \omega t \, dt = 2 \frac{U}{\omega}. \quad (267)$$

On vérifie ainsi que le rapport δ/L devient

$$\frac{\delta}{L} = \left(\frac{2\nu}{\omega} \frac{\omega^2}{4U^2} \right)^{1/2} = \left(\frac{\nu}{UL} \right)^{1/2} = Re^{-1/2} \quad (268)$$

où Re correspond au nombre de Reynolds basé sur la distance L . Par conséquent, l'effet de la viscosité est limité à une couche d'épaisseur relative inversement proportionnelle à la racine de Re . On reviendra à ce point dans la Section 7.