

## 4 Aérodynamique

### 4.1 Potentiel de vitesse et fonction de courant

#### 4.1.1 Potentiel de vitesse

Une fonction potentiel  $\varphi$  ayant des dérivées partielles à l'ordre 2 continues et telle que le champ de vitesse

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi, \quad (77)$$

sur un domaine  $\mathcal{D}$  n'existe que si l'écoulement est irrotationnel, puisque

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \partial\varphi/\partial x & \partial\varphi/\partial y & \partial\varphi/\partial z \end{vmatrix} = (0, 0, 0)^T,$$

par le théorème de Clairaut/Schwartz, où  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  et  $\mathbf{e}_z$  sont les vecteurs unitaires dans les directions des axes correspondants.

$\varphi$  peut être définie en un point quelconque  $P \in \mathcal{D}$  par

$$\varphi(P) = \int_O^P \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}, \quad (78)$$

où  $O$  est quelque point arbitraire fixe dans  $\mathcal{D}$  et le chemin  $OP$  est entièrement contenu dans  $\mathcal{D}$ . Dans un domaine simplement connexe  $\varphi$  est indépendant du choix de la courbe entre  $O$  et  $P$  et est une fonction univoque. Notez que la représentation (77) de  $\mathbf{v}$  pour les écoulements irrotationnels reste valable dans les domaines multiplement connexes mais dans ce cas-ci  $\varphi$  peut être une fonction multivoque. La circulation  $\Gamma$  autour d'une courbe  $\mathcal{C}$  fermée est donnée par

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \oint_{\mathcal{C}} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{x} = [\varphi]_{\mathcal{C}}. \quad (79)$$

#### 4.1.2 Fonction de courant

Pour les écoulements incompressibles où l'équation de continuité implique que  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , il est possible d'exprimer le vecteur vitesse à l'aide d'un vecteur potentiel  $\mathbf{A}$  tel que

$$\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (80)$$

Si les dérivées partielles à l'ordre 2 de  $\mathbf{A}$  sont continues, alors par la substitution de (80) dans (??) nous voyons que l'équation de continuité est vérifiée de façon identique, puisque la divergence d'un vecteur rotationnel est égale à zéro.

Un écoulement *plan* est obtenu quand le vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  est parallèle, par exemple, au plan  $Oxy$  d'un système cartésien. Par conséquent, toutes les dérivées partielles par rapport à  $z$  sont nulles et  $\mathbf{v}$  n'a que les deux composantes  $u$  et  $v$ :

$$\mathbf{v} = (u(x, y, t), v(x, y, t), 0). \quad (81)$$

Dans ce cas, le vecteur potentiel  $\mathbf{A}$  peut être choisi tel que  $\mathbf{A}$  ait les composantes

$$\mathbf{A} = (0, 0, \psi), \quad (82)$$

où  $\psi = \psi(x, y, t)$  dans le cas d'un écoulement incompressible instationnaire. Par ce choix, la condition (??) est satisfaite, pourvu que les dérivées partielles secondes de  $\psi$  soient continues. Selon (80) on trouve avec (82) que

$$\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & \psi(x, y, t) \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x}, 0 \right). \quad (83)$$

La fonction  $\psi$  est appelée *la fonction de courant* et elle a un sens physique important. Ainsi le débit-masse  $\dot{M}$  qui traverse une courbe  $\mathcal{C}$  reliant deux points arbitraires, par exemple l'origine  $O$  et  $P(x, y)$  dans le plan  $Oxy$ , peut être exprimé directement en fonction de  $\psi$ . On obtient dans le cas bidimensionnel

$$\dot{M} = \int_{\mathcal{C}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds, \quad (84)$$

où  $ds$  est l'élément différentiel le long de la courbe  $\mathcal{C}$ . L'expression des composantes du vecteur unitaire  $\mathbf{n}$  est

$$\mathbf{n} = \left( \frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds}, 0 \right). \quad (85)$$

On obtient alors

$$\dot{M} = \int_{\mathcal{C}} \rho(u, v, 0) \cdot \left( \frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds}, 0 \right) ds = \int_{\mathcal{C}} \rho(udy - vdx). \quad (86)$$

Les composantes  $\rho u$ ,  $\rho v$  sont exprimables en fonction de  $\psi$  selon (83) et on obtient indépendamment du chemin d'intégration

$$\dot{M} = \rho \int_{\mathcal{C}} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right) = \rho \int_{\mathcal{C}} d\psi = \rho(\psi_P - \psi_O), \quad (87)$$

$P$  et  $O$  étant les deux points dans le plan  $Oxy$  mentionnés ci-dessus. Il s'en suit que la fonction  $\psi$  fournit une mesure du débit-masse dans l'écoulement.

Une propriété importante de  $\psi$  suit de (83):

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \psi = u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad (88)$$

de sorte que la fonction  $\psi$  est constante le long des lignes de courant. Si la courbe  $\mathcal{C}$  est une ligne de courant, alors  $\psi_P = \psi_O$  et le débit masse  $\dot{M} = 0$ .

Notez aussi, que les lignes de courant sont orthogonales aux surfaces équipotentielles  $\varphi = \text{constante}$ . Ceci découle de (88):

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \psi = \nabla \varphi \cdot \nabla \psi = 0. \quad (89)$$

## 4.2 Le potentiel complexe

Pour un écoulement irrotationnel et incompressible dans le plan  $Oxy$  on peut introduire un potentiel  $\varphi$  et une fonction de courant  $\psi$  tels que, selon (77) et (83)

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (\text{Cauchy-Riemann}) \quad (90)$$

On voit de (90) que si le potentiel et la fonction de courant ont des dérivées partielles secondes continues qu'ils satisfont tous les deux à l'équation de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (91)$$

L'écoulement plan peut aussi s'étudier avec la variable complexe  $z = x + iy$ . Dans le plan complexe on définit alors un potentiel complexe  $w(x, y)$  par

$$w(x, y) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y). \quad (92)$$

Si les dérivées partielles dans les équations de Cauchy-Riemann sont continues dans un domaine, alors  $w$  est une fonction analytique (c.-à.-d. dérivable) de la variable complexe  $z = x + iy$  dans ce domaine et

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &:= \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{w(z + \delta z) - w(z)}{\delta z} \\ &= \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial w}{\partial (iy)} = \frac{1}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (93)$$

Le résultat réciproque dit que si  $w = \varphi + i\psi$  est dérivable en  $z$ , alors les dérivées partielles de premier ordre de  $\varphi$  et  $\psi$  existent en  $z$  et les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites par  $\varphi$  et  $\psi$ . On remarque que les composantes  $u$  et  $v$  sont liées directement à  $dw/dz$  puisque

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv. \quad (94)$$

Donc, la vitesse scalaire  $\|v\|_2$  de l'écoulement peut être calculée de

$$\|v\|_2 = \sqrt{u^2 + v^2} = \left| \frac{dw}{dz} \right|. \quad (95)$$

La vitesse complexe  $w(z)$  peut aussi se représenter en fonction de  $v_r$  et  $v_\theta$ . Par une différentiation radiale de  $w(z)$  avec  $\theta = \text{constante}$  et  $dz = \exp(i\theta)dr$  on obtient

$$\frac{dw}{dz} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} + i \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \exp(-i\theta) = (v_r - iv_\theta) \exp(-i\theta). \quad (96)$$

La multiplication du vecteur  $u - iv$  par  $\exp(i\theta)$  correspond à une rotation de l'angle  $\theta$  de ce même vecteur contre le sens des aiguilles d'une montre dans le plan complexe. L'équivalence des deux expressions (94) et (96) est donc évidente. (Voir la figure 9).

#### 4.2.1 Ecoulements potentiels élémentaires exprimés sous forme complexe

##### 1. Tourbillon et source

Le potentiel complexe

$$w = C \log z, \quad (97)$$

représente une source si  $C = Q/2\pi$ . Pour vérifier on pose

$$\frac{dw}{dz} = (v_r - iv_\theta) \exp(-i\theta) = \frac{Q}{2\pi z} = \frac{Q}{2\pi r} \exp(-i\theta), \quad (98)$$

d'où

$$v_r = \frac{Q}{2\pi r}, \quad v_\theta = 0. \quad (99)$$

Si  $C = -i\Gamma/2\pi$  on obtient le tourbillon

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (100)$$

##### 2. Ecoulement plan au voisinage d'un point d'arrêt.

Le potentiel

$$w = Cz^2, \quad C = \text{constante réelle}, \quad (101)$$

se décompose ainsi

$$w = C(x^2 - y^2) + 2iCxy = \phi + i\psi. \quad (102)$$

En posant

$$\frac{dw}{dz} = (v_r - iv_\theta) \exp(-i\theta) = 2Cz = 2Cr \exp(i\theta) = (2Cr \exp(2i\theta)) \exp(-i\theta) \quad (103)$$

on obtient

$$v_r = 2Cr \cos 2\theta, \quad v_\theta = -2Cr \sin 2\theta. \quad (104)$$

Les lignes équipotentiels et les lignes de courant forment des hyperboles orthogonales. Par le remplacement du demi-plan  $y < 0$  par une paroi formée par l'axe  $x$  on obtient l'écoulement autour d'un point d'arrêt à l'origine.

D'autres exemples peuvent être trouvés dans §4.3 d'Acheson et §5.7.4 de Ryhming.

### 4.3 Méthode des images

Pour résoudre certains problèmes d'écoulements potentiel la méthode des images est souvent utile. Il s'agit de problèmes où une propriété de symétrie peut être exploitée pour reformuler le problème original. Par conséquent, une simplification est obtenue dans l'analyse. La méthode est démontrée ici au moyen d'exemples.

#### 4.3.1 Exemple: écoulement engendré par une source située à proximité d'une paroi

Considérons un écoulement engendré par deux sources placées symétriquement par rapport à la paroi  $y = 0$  selon la figure 11. Pour vérifier que la paroi devienne une ligne de courant  $\psi = \text{constante}$ , on étudie l'écoulement qui résulte de la juxtaposition des deux sources d'intensité égale. Selon (97) avec  $\theta = \arctan((y-b)/x)$  on obtient pour la fonction de courant

$$\frac{2\pi\psi}{Q} = \arctan \frac{y-b}{x} + \arctan \frac{y+b}{x} = \arctan \frac{2xy}{x^2 - y^2 + b^2}, \quad (105)$$

où  $2b$  est la distance entre les sources. Il découle de (105) que  $\psi = 0$  pour  $y = 0$  et pour  $x = 0$ . Par conséquent la paroi  $y = 0$  est une ligne de courant et l'expression (105) représente la solution cherchée.

Pour l'exemple d'un tourbillon situé à proximité d'une paroi, voir Acheson §4.4.

#### 4.3.2 Théorème du cercle de Milne-Thomson

Théorème. Supposons que nous avons un écoulement avec un potentiel complexe  $w = f(z)$ , où toutes les singularités de  $f(z)$  se trouvent en  $|z| > a$ . Donc

$$w = f(z) + \overline{f(a^2/\bar{z})}, \quad (106)$$

est le potentiel complexe d'un écoulement avec (i) les mêmes singularités que  $f(z)$  en  $|z| > a$  et (ii)  $|z| = a$  comme une ligne de courant.

Démonstration. Si toutes les singularités de  $f(z)$  se trouvent en  $|z| > a$ , celles de  $f(a^2/\bar{z})$  se situent en  $|a^2/\bar{z}| > a$ , c'est à dire en  $|z| < a$ . Deuxièmement, sur le cercle lui-même nous avons  $z\bar{z} = a^2$  tel que

$$w = f(z) + \overline{f(\bar{z})}, \text{ en } |z| = a. \quad (107)$$

Il se voit que  $w$  est réelle en  $|z| = a$  qui veut dire que  $\psi = 0$  en  $|z| = a$  et donc que  $|z| = a$  est une ligne de courant.

Comme une application du théorème, considérons un écoulement irrotationnel, uniforme avec vitesse  $U_\infty$  à l'infini, autour d'un cylindre circulaire fixe  $|z| = a$ . Si

l'écoulement est parallèle à l'axe des  $x$ , le potentiel complexe pour l'écoulement sans perturbations est  $f(z) = U_\infty z$ . Utilisant le théorème de Milne-Thomson on trouve que

$$f(a^2/\bar{z}) = U_\infty a^2/\bar{z}, \quad \overline{f(a^2/\bar{z})} = U_\infty a^2/z, \quad (108)$$

d'où

$$w(z) = U_\infty \left( z + \frac{a^2}{z} \right), \quad (109)$$

est le potentiel complexe d'un écoulement, uniforme à l'infini, ayant  $|z| = a$  comme une ligne de courant. Mais, cet écoulement n'est pas le seule qui satisfait à ces conditions. On pourrait superposer la solution élémentaire du fil tourbillonnaire d'intensité  $\Gamma$  pour donner

$$w(z) = U_\infty \left( z + \frac{a^2}{z} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log z, \quad (110)$$

comme potentiel complexe d'un écoulement plus générale, sans composante normale de vitesse en  $|z| = a$ , étant quand-même parallèle homogène vers l'infini.

Les composantes de vitesse  $v_r, v_\theta$  sont maintenant obtenues de l'équation (96):

$$v_r = U_\infty \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta, \quad v_\theta = -U_\infty \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (111)$$

L'apparence des lignes de courant dépend du paramètre

$$B := -\frac{\Gamma}{2\pi U_\infty a}, \quad (112)$$

qui est positive lorsque nous prenons  $\Gamma$  négative de manière à obtenir un mouvement de rotation du tourbillon dans le sens horaire.

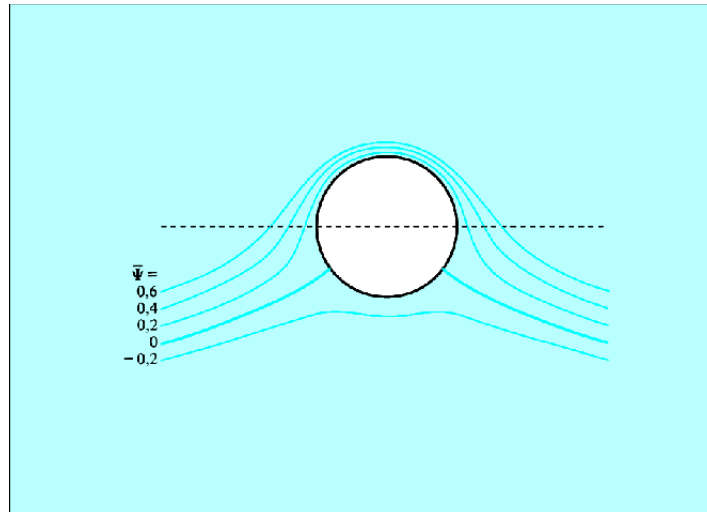


Figure 12: Lignes de courant;  $B = 1.2$

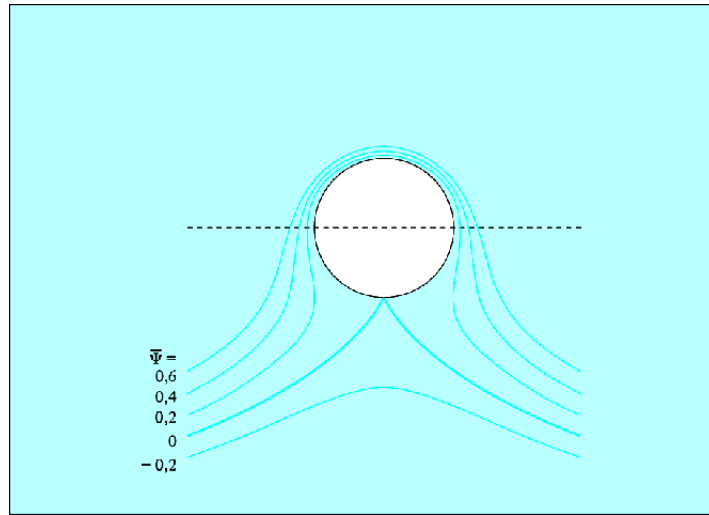


Figure 13: Lignes de courant;  $B = 2$

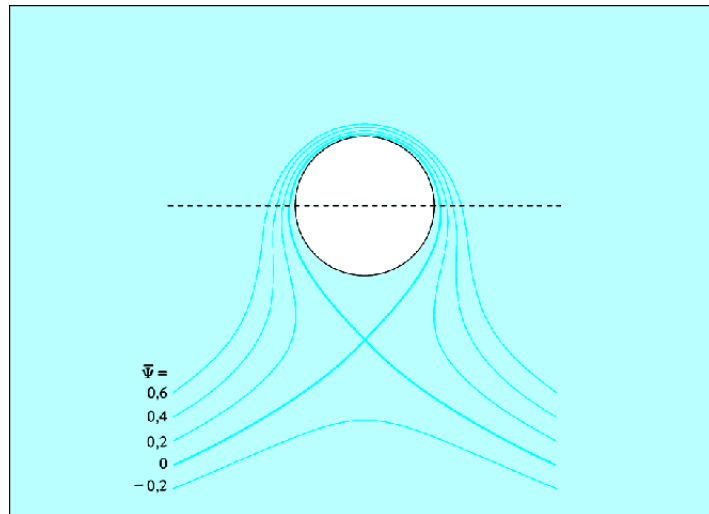


Figure 14: Lignes de courant;  $B = 2.45$

Lorsque  $B < 2$  il existe deux points d'arrêt, tous les deux situés sur la surface du cylindre  $r = a$ , en  $\sin \theta = -B/2$ . Ils se déplacent autour du cylindre lorsque  $B$  augmente jusqu'à  $B = 2$  quand les deux points coïncident. Pour  $B > 2$  on trouve un seul point d'arrêt dans le champ de l'écoulement à l'extérieure du cylindre. Ce point est donné

par la condition de symétrie  $v_r = v_\theta = 0$  pour  $\theta = \frac{3\pi}{2}$ , d'où

$$v_\theta = 0 = -U_\infty \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad (113)$$

ayant la solution

$$\frac{r}{a} = \frac{B}{2} + \left( \frac{B^2}{4} - 1 \right)^{1/2}. \quad (114)$$

La force nette sur le cylindre peut être calculée de la distribution de la pression en  $r = a$ . Puisque la surface du cylindre est une ligne de courant et le déplacement est stationnaire, le théorème de Bernoulli donne

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante en } r = a, \quad (115)$$

et donc

$$\frac{p}{\rho} = \text{constante} - 2U_\infty^2 \sin^2 \theta + \frac{U_\infty \Gamma}{\pi a} \sin \theta \quad \text{en } r = a. \quad (116)$$

Puisque la distribution de la pression reste inchangée sous la transformation  $\theta \rightarrow \pi - \theta$  la force nette doit être verticale. La  $y$ ème composante de la force est donnée par

$$\begin{aligned} F_y &= - \int_{\theta=0}^{2\pi} p a \sin \theta \, d\theta, \\ &= \rho \int_{\theta=0}^{2\pi} \left( 2U_\infty^2 \sin^2 \theta - \frac{U_\infty \Gamma}{\pi a} \sin \theta \right) a \sin \theta \, d\theta = -\rho U_\infty \Gamma. \end{aligned} \quad (117)$$

On constate, donc, que la poussée est positive si  $\Gamma < 0$ .

#### 4.4 Forces et moment: les formules de Blasius

Considérons un écoulement stationnaire autour d'un cylindre de section  $C$  au contour fermé mais arbitraire. Nous voulons déterminer les forces  $F_x e_x$  et  $F_y e_y$  qui s'appliquent au cylindre ainsi que le moment  $M$  autour de l'origine en utilisant la théorie des variables complexes.

Nous obtenons (fig. 15)

$$\begin{aligned} F_x &= - \oint_{\mathcal{C}} p \sin \theta \, ds = - \oint_{\mathcal{C}} p \, dy, \\ F_y &= \oint_{\mathcal{C}} p \cos \theta \, ds = \oint_{\mathcal{C}} p \, dx, \end{aligned} \quad (118)$$

d'où

$$F_x - iF_y = -i \oint_{\mathcal{C}} p(dx - idy) = -i \oint_{\mathcal{C}} p d\bar{z}. \quad (119)$$

Selon Bernoulli (§??) la pression sur la surface du cylindre est donnée par

$$p = -\frac{\rho}{2}(v_x^2 + v_y^2)_{\mathcal{C}} + cte., \quad (120)$$



où

$$(v_x^2 + v_y^2)_C = [(v_x - iv_y)(v_x + iv_y)]_{\mathcal{C}} = \left( \frac{dw}{dz} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} \right)_{\mathcal{C}}. \quad (121)$$

Etant donné que la constante ne contribue pas aux intégrales nous obtenons

$$F_x - iF_y = i \frac{\rho}{2} \oint_{\mathcal{C}} \frac{dw}{dz} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} d\bar{z}. \quad (122)$$

Dans cette formule

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} d\bar{z} &= (v_x + iv_y)(dx - idy) = v_x dx + v_y dy - i(v_x dy - v_y dx), \\ &= d\varphi - id\psi. \end{aligned} \quad (123)$$

En comparant avec  $(dw/dz)dz = dw = d\varphi + id\psi$  et sachant que la courbe  $\mathcal{C}$  est une ligne de courant sur laquelle  $d\psi = 0$ , on peut écrire

$$\left( \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} d\bar{z} \right)_{\mathcal{C}} = \left( \frac{dw}{dz} dz \right)_{\mathcal{C}} \quad (124)$$

Nous obtenons finalement

$$F_x - iF_y = i \frac{\rho}{2} \oint_{\mathcal{C}} \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz. \quad (125)$$

De la même façon on calcule le moment  $M$  autour de l'origine d'où

$$\begin{aligned} M &= \oint_{\mathcal{C}} p(x \cos \theta + y \sin \theta) ds = \oint_{\mathcal{C}} p(x dx + y dy), \\ &= -\frac{1}{2} \rho \oint_{\mathcal{C}} (v_x^2 + v_y^2)(x dx + y dy) = -\frac{1}{2} \rho \Re \oint_{\mathcal{C}} \frac{dw}{dz} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} z d\bar{z}, \\ &= -\frac{1}{2} \rho \Re \oint_{\mathcal{C}} \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 z dz, \end{aligned} \quad (126)$$

où  $\Re$  indique la partie réelle de l'intégrale. Les intégrales complexes dans ces formules peuvent être évaluées le long de n'importe quelle courbe  $C$  qui entoure le cylindre, pourvu qu'il n'y ait pas d'autres singularités présentes entre la courbe  $C$  et le cylindre. Les formules ainsi établies sont dénommées les formules de Blasius.

#### 4.4.1 Ecoulement autour d'un cylindre de section circulaire

Comme application nous calculons les forces sur un cylindre de section circulaire (voir §4.3.2 pour le calcul direct en intégrant le champ de pression). Le potentiel complexe est (voir Eqn. (110))

$$w = U_{\infty} \left( z + \frac{a^2}{z} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log z, \quad (127)$$

de sorte que, en appliquant une formule de Blasius:

$$F_x - iF_y = i\frac{\rho}{2} \oint_C \left[ U_\infty \left( 1 - \frac{a^2}{z^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi z} \right]^2 dz. \quad (128)$$

Lorsqu'on développe l'intégrande seulement le terme contenant  $z^{-1}$  donne une contribution à l'intégrale. Le coefficient de ce terme-là est  $-iU_\infty\Gamma/\pi$ , si bien que le théorème fondamental des résidus donne

$$F_x - iF_y = i\frac{\rho}{2} \times 2\pi i \times \left( -i\frac{U_\infty\Gamma}{\pi} \right) = i\rho U_\infty\Gamma. \quad (129)$$

Donc,

$$F_x = 0, F_y = -\rho U_\infty\Gamma, \quad (130)$$

comme trouvés auparavant.

#### 4.4.2 Écoulement autour d'un cylindre de section arbitraire. La loi selon Kutta-Joukowski.

Nous calculons les forces sur un cylindre de section arbitraire mais de contour fermé et simple dans un écoulement plan, parallèle (avec vitesse  $U_\infty$  dans la direction  $x$  à l'infini) et homogène d'un fluide idéal. Soit  $\Gamma$  la circulation autour du corps. Alors

$$F_x = 0, F_y = -\rho U_\infty\Gamma. \quad (131)$$

Pour la démonstration on commence en choisissant l'origine  $O$  telle qu'elle se trouve à l'intérieure du corps. Alors, en supposant que l'écoulement n'a pas de singularités  $dw/dz$  sera une fonction analytique de  $z$  dans le domaine de l'écoulement et peut être exprimé sous forme d'un développement selon Laurent autour de l'origine

$$\frac{dw}{dz} = U_\infty + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots, \quad (132)$$

ce développement étant valable en  $R < |z| < \infty$ , où  $R$  est le rayon du cercle le plus petit qui est centré en  $O$  et qui entoure le cylindre.

Dans le théorème de Blasius l'intégrale est évaluée le long de la courbe  $\mathcal{C}$  qui entoure le cylindre. Mais si l'écoulement est vide de singularités l'intégrale peut être évaluée le long de n'importe quelle courbe entourant le corps. On prend donc une telle courbe ( $\mathcal{C}'$ , disons) contenue entièrement dans la région  $|z| > R$ , ce qui nous permet d'écrire

$$F_x - iF_y = i\frac{\rho}{2} \oint_{\mathcal{C}'} \left( U_\infty + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \right)^2 dz. \quad (133)$$

Lorsque on développe l'intégrande seulement le terme contenant  $z^{-1}$  donne une contribution à l'intégrale. Avec un résidu  $2U_\infty a_1$  en  $z = 0$  ceci donne

$$F_x - iF_y = i\frac{\rho}{2} \cdot 2\pi i \cdot 2U_\infty a_1 = -2\pi\rho U_\infty a_1. \quad (134)$$

Pour trouver  $a_1$  on utilise (132) pour écrire

$$2\pi ia_1 = \oint_{C'} \frac{dw}{dz} dz. \quad (135)$$

On utilise le théorème de Cauchy et un argument de coupe transversale pour justifier prendre cette intégrale le long de  $C$  plutôt que  $C'$ , puisque  $dw/dz$  est analytique dans le domaine de l'écoulement entier. Donc

$$2\pi ia_1 = \oint_{\mathcal{C}} \frac{dw}{dz} dz = [w]_{\mathcal{C}} = [\varphi + i\psi]_{\mathcal{C}}. \quad (136)$$

Puisque  $\mathcal{C}$  est une ligne de courant,  $[\psi]_{\mathcal{C}} = 0$ . Le changement en  $\varphi$  en passant une fois autour de  $\mathcal{C}$  est  $\Gamma$ , la circulation autour du cylindre. Donc

$$2\pi ia_1 = [\varphi]_C = \Gamma, \quad (137)$$

et de (134) le résultat (131) suit.

#### 4.5 Méthode de transformation conforme

Nous considérons deux variables complexes  $\zeta = \xi + i\eta$  et  $z = x + iy$  et leurs plans complexes correspondants. Si  $\zeta$  est une fonction univoque de  $z$ , telle que

$$\zeta = f(z), \quad (138)$$

on trouve que chaque point  $z$  dans le plan  $z$  possède une image dans le plan  $\zeta$ . Une courbe dans le plan  $z$  équivaut à une autre courbe dans le plan  $\zeta$ , de telle sorte que la seconde correspond à une image ou à une transformation de la première. La transformation est dite *conforme* lorsqu'un petit triangle dans le plan  $\zeta$  correspond à un triangle semblable dans le plan  $z$ . Prenons un point  $z_0$  dans le plan  $z$ , ayant un point correspondant  $\zeta_0$  dans le plan  $\zeta$  et supposons que  $f^{(n)}(z_0)$  est la première dérivée non nulle de  $f(z)$  en  $z_0$ . Typiquement  $n$  sera égal à 1. Soit  $\delta z$  un petit élément dans le plan  $z$ , d'origine  $z_0$ , et que  $\delta \zeta$  désigne l'élément correspondant dans le plan  $\zeta$ , d'origine  $\zeta = \zeta_0$ . En utilisant le théorème de Taylor on voit que

$$\delta \zeta \equiv f(z_0 + \delta z) - f(z_0) = \frac{(\delta z)^n}{n!} f^{(n)}(z_0) + O(\delta z)^{n+1}. \quad (139)$$

Jusqu'au premier ordre donc

$$\arg(\delta \zeta) \approx n \arg(\delta z) + \arg(f^{(n)}(z_0)), \quad (140)$$

et il s'en suit que si  $\delta z_1$  et  $\delta z_2$  notent deux petits éléments dans le plan  $z$ , tous les deux ayant origine  $z_0$ , alors

$$\arg(\delta \zeta_2) - \arg(\delta \zeta_1) = n[\arg(\delta z_2) - \arg(\delta z_1)]. \quad (141)$$

(Lorsque deux courts éléments qui se coupent en un point dans le plan  $z$  sont transformés en deux courts éléments se coupant dans le plan  $\zeta$  on voit ainsi que l'angle entre les deux est multiplié par  $n$ ). Dans le cas usuel ( $n = 1$ ) les angles sont donc conservés.

Supposons maintenant qu'un écoulement soit donné dans le plan  $z$ , défini par son potentiel complexe  $w(z)$ . Par la transformation  $\zeta(z)$ ,  $z$  est défini comme une fonction inverse de  $\zeta$ , et nous pouvons écrire

$$w(z) = w(\zeta(z)) := \varpi(\zeta). \quad (142)$$

La fonction analytique  $\varpi(\zeta)$  définit ainsi un écoulement dans le plan  $\zeta$ . Les lignes équipotentielles et les lignes de courant de l'écoulement original dans le plan  $z$  sont transformées et prennent des formes différentes dans le plan  $\zeta$ . Cela découle directement de l'équation (142) et de la définition (92) du potentiel  $w(z)$ .

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = \varpi(\zeta) = \phi(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta), \quad (143)$$

où  $\phi(\xi, \eta)$  et  $v(\xi, \eta)$  représentent le potentiel et la fonction de courant dans le plan  $\zeta$ . Pour l'écoulement stationnaire en particulier, il s'en suit que l'écoulement autour d'un corps dans le plan  $z$  équivaut à l'écoulement autour d'un autre corps dans le plan  $\zeta$ . La transformation conforme peut ainsi être utilisée pour étudier, par exemple, l'écoulement autour d'un profil d'aile par la transformation du profil en un cylindre circulaire. Puisque l'écoulement autour d'un cylindre circulaire est connu dans ses moindres détails, l'écoulement autour d'un profil peut être calculé à l'aide de la transformation. On obtient ainsi une solution exacte de l'équation de Laplace pour le profil, parce que la solution de l'écoulement du cylindre circulaire est exacte.

La vitesse complexe dans le plan  $\zeta$  est obtenue comme suit

$$\frac{d\varpi}{d\zeta} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{d\zeta} = \frac{dw}{dz} \frac{1}{\zeta'(z)}. \quad (144)$$

La circulation complexe demeure invariable par la transformation

$$(\Gamma + iQ)_\zeta = \oint_{\mathcal{C}_\zeta} \frac{d\varpi}{d\zeta} d\zeta = \oint_{\mathcal{C}_z} \frac{dw}{dz} \frac{1}{\zeta'(z)} \frac{d\zeta}{dz} dz = (\Gamma + iQ)_z \quad (145)$$

où  $\mathcal{C}_\zeta$  représente la transformée de la courbe fermée  $\mathcal{C}_z$ .

#### 4.5.1 Exemple: la transformation de Joukowski

La transformation selon Joukowski est définie par

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z}, \quad \text{où } a = \text{nombre réel}. \quad (146)$$

Posons  $z = r \exp(i\theta)$ ; pour le point-image dans le plan  $\zeta$  on obtient

$$\zeta = r \exp(i\theta) + \frac{a^2}{r} \exp(-i\theta). \quad (147)$$

Le point infini n'est pas changé par la transformation puisque

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{a^2}{z} = 0, \text{ et } \lim_{z \rightarrow \infty} \zeta(z) = z. \quad (148)$$

Par conséquent l'écoulement à grande distance de l'origine est identique dans les deux plans.

La transformation change un cercle centré à l'origine dans le plan  $z$  en une ellipse dans le plan  $\zeta$  (voir la figure 16). Soit, donc, un cercle donné par  $z = r_0 \exp(i\theta)$ . Selon (146) on obtient

$$\zeta = r_0 \exp(i\theta) + \frac{a^2}{r_0} \exp(-i\theta) = \left(r_0 + \frac{a^2}{r_0}\right) \cos \theta + i \left(r_0 - \frac{a^2}{r_0}\right) \sin \theta = \xi + i\eta. \quad (149)$$

Après l'élimination de  $\theta$  il résulte

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 = \frac{\xi^2}{\left(r_0 + \frac{a^2}{r_0}\right)^2} + \frac{\eta^2}{\left(r_0 - \frac{a^2}{r_0}\right)^2} \quad (150)$$

ce qui représente une ellipse dans le plan  $\zeta$ . Les deux foyers sont situés sur l'axe  $\xi$  en  $\xi = \pm 2a$ .

#### 4.5.2 Ecoulement autour d'un plan portant

La transformation de Joukowski transforme le cercle  $r = r_0 = a$  en un plan  $\zeta = \xi = 2a \cos \theta$ . Pour calculer l'écoulement autour d'un plan portant, on peut donc utiliser l'écoulement connu autour d'un cylindre circulaire. Celui-ci possède un potentiel complexe qui, selon (110) s'écrit dans un plan  $\widehat{z}$

$$\widehat{w}(\widehat{z}) = U_\infty \left( \widehat{z} + \frac{a^2}{\widehat{z}} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \log \widehat{z}. \quad (151)$$

Pour étudier un plan portant placé à un angle d'attaque  $\alpha$ , il faut appliquer la transformation  $z = \widehat{z} \exp(i\alpha)$  qui correspond à une rotation d'angle  $\alpha$ . Ainsi

$$w(z) = \widehat{w}(z \exp(-i\alpha)) = U_\infty \left( z \exp(-i\alpha) + \frac{a^2}{z} \exp(i\alpha) \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \log(z \exp(-i\alpha)). \quad (152)$$

Ensuite, l'application de la transformation conforme selon Joukowski (146) donne le potentiel  $\varpi(\zeta)$  selon (142) pour l'écoulement autour d'un plan portant situé dans le plan complexe  $\zeta$ . La vitesse complexe dans le plan  $\zeta$  devient selon (144) et (146)

$$\frac{d\varpi}{d\zeta} = \frac{dw}{dz} \frac{1}{\zeta'(z)}, \quad \zeta'(z) = 1 - \frac{a^2}{z^2}. \quad (153)$$

En particulier, sur le cercle lui-même  $z = a \exp(i\theta)$  et on obtient à partir de (152)

$$\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=a \exp(i\theta)} = U_\infty (\exp(-i\alpha) - \exp(i\alpha - 2i\theta)) - i \frac{\Gamma}{2\pi a} \exp(-i\theta). \quad (154)$$

Par conséquent

$$\left. \frac{d\varpi}{d\zeta} \right|_{\text{plan}} = U_\infty \left( \exp(-i\alpha) - \exp(i\alpha - 2i\theta) - i \frac{\Gamma}{2\pi a U_\infty} \exp(-i\theta) \right) \frac{1}{1 - \exp(-2i\theta)}. \quad (155)$$

En faisant appel à l'identité

$$\frac{1}{1 - \exp(-2i\theta)} = \frac{1 - \exp(2i\theta)}{4 \sin^2 \theta}, \quad (156)$$

et à des relations trigonométriques élémentaires, on obtient

$$\left. \frac{d\varpi}{d\zeta} \right|_{\text{plan}} = \frac{U_\infty}{2 \sin^2 \theta} \left[ \cos \alpha - \cos(\alpha - 2\theta) - \frac{\Gamma}{2\pi a U_\infty} \sin \theta \right]. \quad (157)$$

Ce résultat confirme que  $d\varpi/d\zeta$  est nécessairement une fonction réelle, puisque la composante normale du vecteur vitesse est nulle sur le plan. L'expression pour la vitesse  $d\varpi/d\zeta$  doit être complétée par la relation entre l'angle  $\theta$  et la coordonnée  $\xi$  dans le plan  $\zeta$ . Celle-là est donnée par  $\zeta \equiv \xi = 2a \cos \theta$ .

Pour examiner la solution (157) il y a deux paramètres à disposition,  $\alpha$  et  $\Gamma$ . Parmi toutes les combinaisons possibles entre elles, notons premièrement le cas où  $\alpha$  et  $\Gamma$  tendent vers zéro. Dans ce cas, l'écoulement parallèle et homogène demeure non perturbé puisque le plan et l'écoulement sont alignés.

Ensuite, prenons le cas particulier  $\Gamma = 0$  (fig. 17). Celui-ci représente un écoulement autour du plan avec deux points d'arrêt obtenus en mettant  $d\varpi/d\zeta = 0$ , ce qui donne

$$\cos \alpha = \cos(\alpha - 2\theta), \quad \text{d'où } \theta_1 = \alpha + \pi \text{ et } \theta_2 = \alpha. \quad (158)$$

Sur la figure 17 ces deux points sont indiqués par  $P_1$  (intrados) et  $P_2$  (extrados) respectivement. La solution pour  $\Gamma = 0$  démontre également que  $d\varpi/d\zeta \rightarrow \pm\infty$  pour  $\theta = \pi$  et  $\theta = 0$ . Les points homologues sont en  $\xi = \mp 2a$  c'est-à-dire, aux deux extrémités du plan.

Afin de poursuivre l'étude du comportement de la vitesse  $d\varpi/d\zeta$  sur le plan en fonction des paramètres  $\alpha$  et  $\Gamma$ , il est avantageux d'introduire la transformation trigonométrique suivante

$$\cos \alpha - \cos(\alpha - 2\theta) = 2 \sin^2 \theta \cos \alpha - 2 \sin \alpha \sin \theta \cos \theta. \quad (159)$$

Par conséquent  $d\varpi/d\zeta$  prend la forme

$$\left. \frac{d\varpi}{d\zeta} \right|_{\text{plan}} = U_\infty \cos \alpha - \frac{U_\infty}{2 \sin \theta} \left( \frac{\Gamma}{2\pi a U_\infty} + 2 \sin \alpha \cos \theta \right). \quad (160)$$

Parmi toutes les différentes valeurs de  $\Gamma$  possibles on peut, en particulier, étudier celle qui fait correspondre au point d'arrêt  $S_2$  sur le cylindre circulaire le point  $P_2$  à l'arrière du plan avec les coordonnées  $\theta = 0$  et  $\xi = 2a$  respectivement (fig. 18). Ainsi à partir de (160) on obtient au bord de fuite du plan une vitesse  $d\varpi/d\zeta$  de valeur finie si  $\Gamma$  est choisi tel que

$$\Gamma = -4\pi a U_\infty \sin \alpha. \quad (161)$$

### 4.5.3 Portance d'un profil

En considérant dans le plan  $z$  un cercle intermédiaire de rayon  $r$  ( $r > a$ ) et dont l'origine se situe au point  $x = -(r - a)$ ,  $iy = 0$ , on obtient un profil symétrique (fig. 19a). Le nez du profil est enveloppé par l'ellipse issue du cercle de rayon  $r_1$ , tandis que le bord de fuite enveloppe lui-même le bord de fuite de la plaque plane issue du cercle de rayon  $a$ . Notons par  $\lambda$  la différence  $r - a$ . Alors, l'équation du profil dans le plan  $\zeta$  est

$$\zeta = -\lambda + (a + \lambda) \exp(i\theta) + \frac{a^2}{-\lambda + (a + \lambda) \exp(i\theta)}. \quad (162)$$

Son épaisseur et sa forme dépendent de  $\lambda$ .

Le potentiel complexe  $\varpi(\zeta)$  qui correspond à un écoulement uniforme au travers de ce profil avec une angle d'attaque  $\alpha$  est obtenu en modifiant premièrement l'équation (152) pour tenir compte des nouveaux rayon et emplacement du cylindre dans le plan  $z$ :

$$w(z) = U_\infty \left[ (z + \lambda) \exp(-i\alpha) + \frac{(a + \lambda)^2}{(z + \lambda)} \exp(i\alpha) \right] - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log((z + \lambda) \exp(-i\alpha)), \quad (163)$$

et après en substituant

$$z = \frac{1}{2}\zeta + \left( \frac{1}{4}\zeta^2 - a^2 \right)^{1/2}. \quad (164)$$

Les composantes de vitesse  $v_\xi$  et  $v_\eta$  dans le plan  $\zeta$  sont obtenues de

$$\begin{aligned} v_\xi - iv_\eta &= \frac{d\varpi}{d\zeta} = \frac{dw/dz}{d\zeta/dz} \\ &= \left\{ U_\infty \left[ \exp(-i\alpha) - \left( \frac{a + \lambda}{z + \lambda} \right)^2 \exp(i\alpha) \right] - \frac{i\Gamma \exp(-i\alpha)}{2\pi(z + \lambda)} \right\} / \left( 1 - \frac{a^2}{z^2} \right), \end{aligned} \quad (165)$$

et la valeur de  $\Gamma$  qui fait égalé à zéro le numérateur au bord de fuite ( $z = a$ ) est

$$\Gamma = -4\pi(a + \lambda)U_\infty \sin \alpha, \quad (\text{condition de Kutta}). \quad (166)$$

Dans ce cas-ci, donc, l'écoulement est lisse et libre de singularités partout et la poussée est égale à

$$F_y = -\rho U_\infty \Gamma = 4\pi\rho(a + \lambda)U_\infty^2 \sin \alpha. \quad (167)$$

Lorsque  $\lambda \ll a$  le profil décrit en (162) est mince et symétrique, ayant longueur approximativement égale à  $4a$ . En négligeant  $\lambda$  par rapport à  $a$  en (166) nous obtenons l'expression classique pour la circulation

$$\Gamma = -\pi U_\infty L \sin \alpha, \quad (168)$$

où  $L$  est la longueur de la plaque plane.

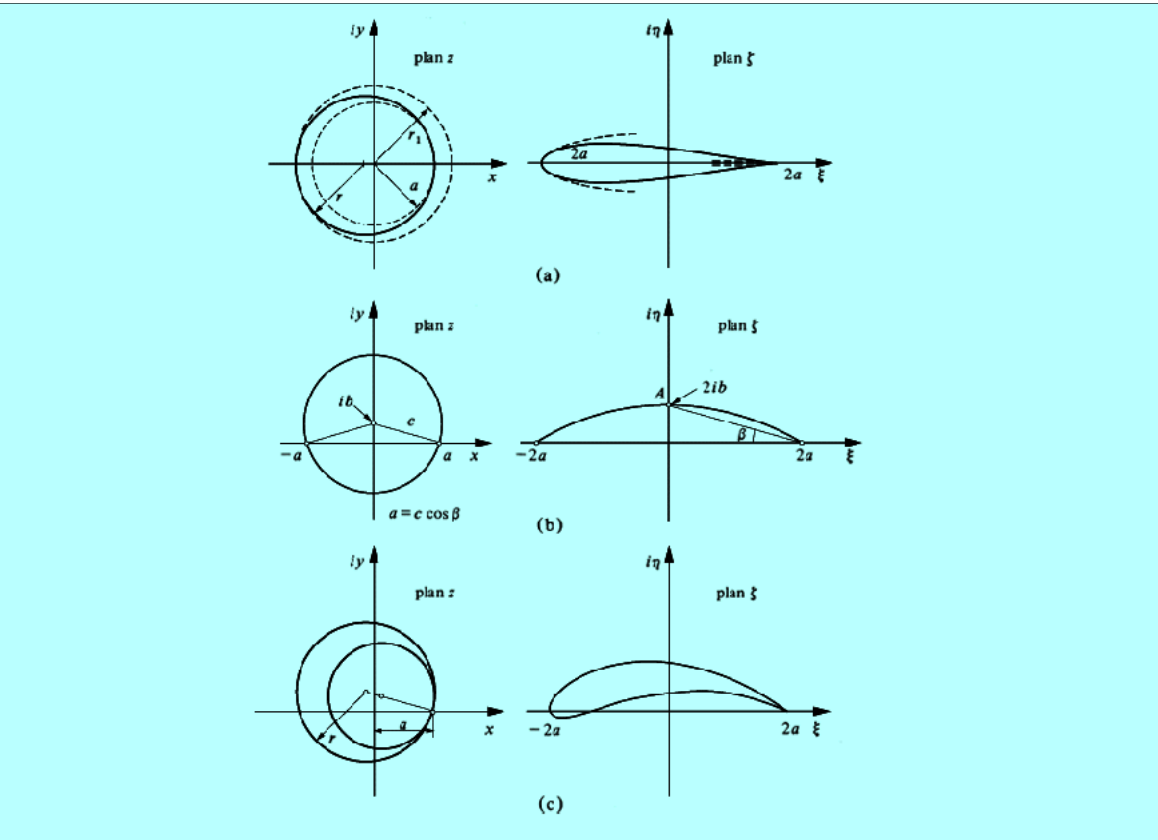


Figure 19:



#### 4.5.4 Tourbillon de démarrage (Acheson §5.1)

Quand une aile bidimensionnelle commence à se mouvoir dans un fluide au repos, la circulation s'adapte constamment, de telle sorte que la condition de Kutta reste vérifiée. Comme la circulation est proportionnelle à la vitesse de l'aile, la circulation augmente de façon continue avec la vitesse. Cependant, la circulation autour d'une courbe fermée  $\mathcal{C}$  qui se meut avec le fluide doit, selon le théorème de Kelvin, rester nulle (voir la figure 20). Soit  $aec$  une courbe instantanée en espace au temps  $t$  telle que la courbe  $aecda$  entoure le profil mais ni le sillage ni le tourbillon de démarrage. Alors

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \oint_{aecda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = - \oint_{abcea} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}.$$

Il s'en suit que l'aile, dans un mouvement instationnaire engendre derrière elle une couche tourbillonnaire de circulation totale  $\Gamma > 0$  (si l'angle d'attaque  $\alpha$  est positif). Cette couche est instable et tend à s'enrouler en un tourbillon dit tourbillon de démarrage. Après un certain temps, lorsque l'aile se meut à une vitesse et une circulation constantes, ce tourbillon de démarrage s'éloigne dans le champ d'aval et son influence sur l'écoulement autour de l'aile devient négligeable; l'aile se déplace de façon stationnaire. Chaque fois que la vitesse de l'aile varie, un nouveau tourbillon de démarrage se produit afin de permettre un ajustement de la valeur de  $\Gamma$ .

#### 4.5.5 Poussée: la déflexion de la veine d'air

Pour un écoulement *stationnaire* et dans l'absence des forces massiques l'équation d'Euler se réduit à

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p. \quad (169)$$

La  $i$ -ième composante de cette équation est (avec sommation sur l'indice  $j$ )

$$\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (170)$$

et on constate que pour un fluide *incompressible* ( $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ) le membre de gauche peut être écrit sous la forme

$$\rho \frac{\partial}{\partial x_j} (v_j v_i), \quad (171)$$

tel que notre équation devient

$$\rho \frac{\partial}{\partial x_j} (v_j v_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (172)$$

On intègre l'équation (172) sur une région fixe  $S$  du plan  $xy$  ayant une frontière fermée  $\mathcal{C}$  (voir la figure 21)

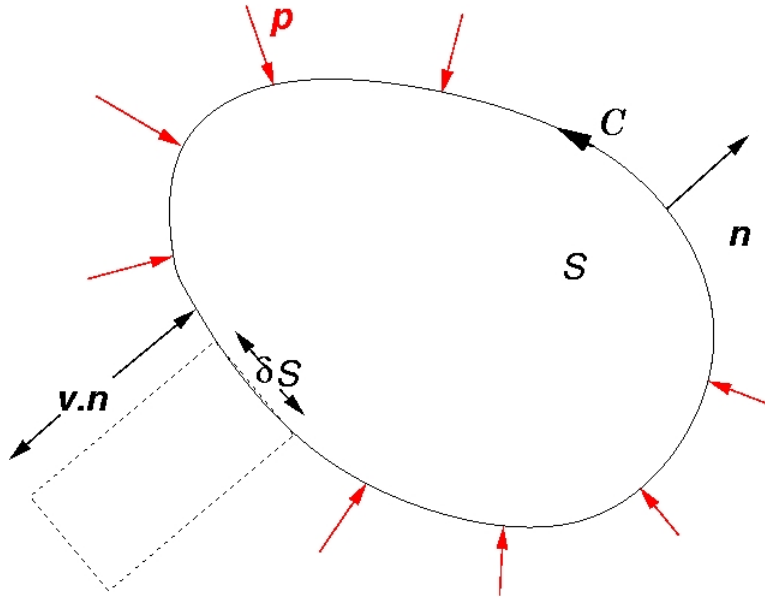


Figure 21:

et on utilise le théorème de Green dans le plan (sommation sur  $j$ ):

$$\int_S \nabla \cdot \mathbf{F} \, dS = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad \text{ou} \quad \int_S \frac{\partial F_j}{\partial x_j} \, dS = \oint_{\mathcal{C}} F_j n_j \, ds, \quad (173)$$

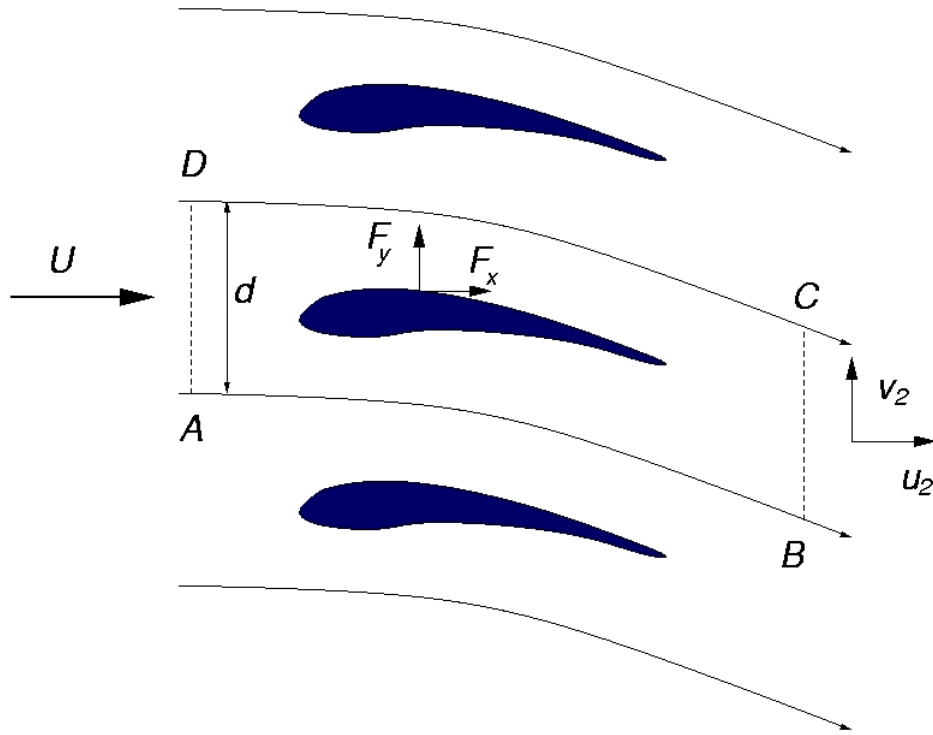


Figure 22:

pour voir que

$$\int_S \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (v_j v_i) dS = \oint_{\mathcal{C}} \rho v_i v_j n_j ds = - \int_S \frac{\partial p}{\partial x_i} dS = - \oint_{\mathcal{C}} p n_i ds. \quad (174)$$

Donc, en forme vectorielle

$$\int_{\mathcal{C}} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds = - \int_{\mathcal{C}} p \mathbf{n} ds. \quad (175)$$

À gauche  $\rho \mathbf{v}$  est la quantité de mouvement par unité de volume/superficie du fluide et  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds$  est le volume qui passe par  $ds$  chaque seconde. Donc le membre de gauche de l'équation représente le taux avec lequel la quantité de mouvement est transportée au travers de  $\mathcal{C}$ .

### Écoulement au travers d'un empilement d'ailes

Supposons que les profils soient séparés à une distance  $d$  l'un de l'autre, comme démontrés sur la figure 22. Les portions des lignes de courant identiques  $AB$  et  $DC$  sont à une distance  $d$  l'une de l'autre.  $AD$  est loin en amont où la vitesse est  $(U_\infty, 0)$  et

$BC$  est loin en aval où nous supposons l'écoulement est de nouveau uniforme et égal à  $(u_2, v_2)$ . Soit  $\mathcal{C}'$  la surface de l'aile à l'intérieur de  $ABCD$ .

Puisque le fluide est incompressible le flux au travers de  $AD$  doit être égal à celui au travers de  $BC$ . Donc  $U_\infty d = u_2 d \Rightarrow u_2 = U_\infty$ . Maintenant on utilisera le résultat (175) avec  $\mathcal{C} = ABCDA \cup \mathcal{C}'$  ( $S$  est l'intérieur de  $ABCD$  excluant l'aile). Par la troisième loi de Newton (principe de l'égalité de l'action et de la réaction) si la poussée sur l'aile est  $F_y$ , la force verticale sur  $\mathcal{C}$  est  $-F_y$ . La quantité de mouvement verticale qui s'écoule chaque seconde au travers de la frontière  $\mathcal{C}$  est  $\rho v_2 U_\infty d$ . Donc

$$F_y = -\rho U_\infty v_2 d. \quad (176)$$

Ainsi, on voit qu'une poussée positive correspond à une vitesse  $v_2 < 0$ .

Notez que la circulation  $\Gamma$  ici est donné par

$$\Gamma = v_2 d (< 0), \quad (177)$$

tel que, comme avant,  $F_y = -\rho U_\infty \Gamma$ .

#### 4.5.6 Le paradoxe de d'Alembert

Considérons l'écoulement stationnaire d'un fluide idéal autour d'un corps trois dimensionnel fixe qui est mis dans un canal de section uniforme comme indiqué sur la figure 23. On utilisera l'équation (175) dans la région fixe bornée par le corps, les deux coupes transversales  $S_1$  et  $S_2$  et les parois du canal. La force nette dans la direction de l'écoulement sur la frontière de la région est

$$-\int_S p \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} dS = \int_{S_1} p_1 dS - \int_{S_2} p_2 dS - D, \quad (178)$$

où  $D$  désigne la traînée exercée par le fluide sur le corps. Selon (175)

$$\int_{S_1} p_1 dS - \int_{S_2} p_2 dS - D = \rho \int_{S_2} u_2^2 dS - \rho \int_{S_1} u_1^2 dS, \quad (179)$$

et donc

$$D = \int_{S_1} (p_1 + \rho u_1^2) dS - \int_{S_2} (p_2 + \rho u_2^2) dS. \quad (180)$$

Supposons que l'écoulement soit uniforme loin en amont du corps, avec vitesse  $U_\infty$  et pression  $p_0 = \text{constante}$ . Supposons que les conditions soient aussi uniformes suffisamment loin en aval du corps. Par la conservation de la masse, la vitesse est donc égale à  $U_\infty$ . Par le théorème de Bernoulli la pression loin en aval du corps doit être égale à  $p_0$ . Laissant tendre les positions de  $S_1$  et  $S_2$  vers l'infini dans les directions en amont et en aval, respectivement, on déduit de (180) que  $D = 0$ .

Le paradoxe de d'Alembert n'est valable que pour les écoulements stationnaires d'un fluide idéal incompressible. Dans le cas de mouvements accélérés, des forces positives ou négatives peuvent se produire même dans un fluide idéal. En effet, si

on désigne par  $T(t)$  l'énergie cinétique d'une quantité illimitée et sans frontières d'un fluide idéal qui est initialement stationnaire et si  $U(t)$  est la vitesse d'un corps immergé dans le fluide, le taux de changement de l'énergie  $T$  par rapport au temps est donné par

$$DU = \frac{dT}{dt}, \quad (181)$$

de sorte que jusqu'à ce que le corps se déplace avec une vitesse constante, il existe une traînée sur le corps parce que le corps doit faire du travail pour établir l'énergie cinétique du fluide. Lorsque  $U$  est constante,  $T$  l'est aussi.

Le paradoxe de d'Alembert ne s'applique plus pour un fluide visqueux. Des forces tangentielles se produisent sur toute surface solide et créent une traînée de frottement. Il faut également tenir compte de forces résultant d'une distribution de pression asymétrique autour du corps considéré. Pour un écoulement incompressible l'asymétrie provient par exemple d'un décollement localisé sur la paroi du corps. Ce dernier type de force est dénommé traînée de pression. La force de traînée totale peut ainsi être divisée en deux parties qui sont

- la traînée de frottement causée par les contraintes de cisaillement agissant tangentiellement sur la surface du corps,
- la traînée de pression qui est engendrée par les forces de pression agissant perpendiculairement à la surface du corps.