MAT 1600
Exercices sur les nombres complexes

Les nombres complexes sont des nombres de la forme $z = a + ib$ où a et b sont des nombres réels et i représente une racine du nombre -1 (et donc $i = \sqrt{-1}$ et $i^2 = -1$). À cause de l'ajout de cette racine i d'un nombre négatif (-1), l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, contient plus que les nombres réels. L'ensemble $\mathbb{C}$ possède quand même les quatre opérations élémentaires qu'a l'ensemble des réels, à savoir l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$, ces opérations sont :

- **addition** : $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$;
- **soustraction** : $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$;
- **multiplication** : $z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$;
- **division** : $z_1/z_2 = (a_1 + ib_1)/(a_2 + ib_2)$.

Le résultat d'une division peut souvent être simplifié comme suit :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2}\,\frac{a_2 - ib_2}{a_2 - ib_2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(b_1 a_2 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Pour un nombre complexe $z = a + ib$ avec a et b réels, les nombres a et b sont appelés parties réelle et imaginaire respectivement. On écrit

$$a = \operatorname{Re} z \qquad \text{et} \qquad b = \operatorname{Im} z.$$

---

1. Évaluer les expressions suivantes en les mettant sous forme (*partie réelle*) $+i$ (*partie imaginaire*).
(a) $(3 - 2i) + (-1 - i)$
(b) $(1 + i\sqrt{2}) + (\sqrt{2} - i)$
(c) $(1 + i)(1 - 2i)$
(d) $(2 + 3i)(2 + i)$
(e) $(\sqrt{2} + i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i\sqrt{2}) - (\sqrt{3} + i\sqrt{2})(\sqrt{2} - i\sqrt{3})$
(f) $(4 + i3)\{(2 - i) - (i - 3)\}$
(g) $(2 + ia)\{(3 + 2i) + (1 - i)\}i$; si a est lui-même un nombre complexe, est-ce que la réponse est différente ?

2. Évaluer ; s'il y a un dénominateur, faire les simplifications nécessaires pour qu'il soit réel.
(a) $(1 - i)(1 + i)$
(b) $(1 - i)/(1 + i)$
(c) $(1 + i\sqrt{3})(2 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)/(1 - i)^2$
(d)

$$2\frac{1 - 2i}{1 + 2i} + i\frac{2 + i}{2 - i}$$

(e)

$$\frac{a + ib}{c + id} - \frac{a - ib}{c - id}$$

(f)

$$\frac{i^2 + i^7 + i^{11}}{i^4 + i^{10} + i^{21} + i^{23} + i^{31}}$$

La conjugaison complexe d'un nombre complexe $z = a + ib$ est dénotée par une barre horizontale au-dessus de ce nombre ($\bar{z}$ est le conjugué complexe de z) et est donnée, lorsque a et b sont les parties réelle et imaginaire de z, par :

Conjugaison complexe : $\bar{z} = a - ib$

La valeur absolue d'un nombre complexe, notée par $|z|$, est donnée par

Valeur absolue : $|z| = +\sqrt{z\bar{z}}$

et, si a et b sont les parties réelle et imaginaire de z, alors

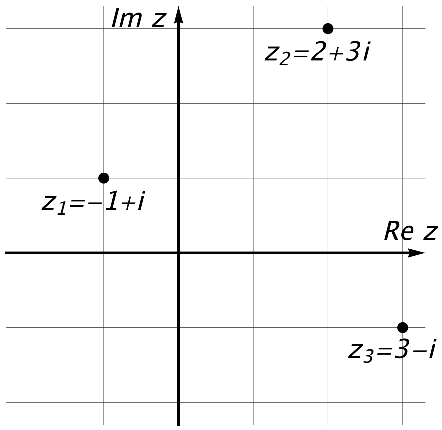
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

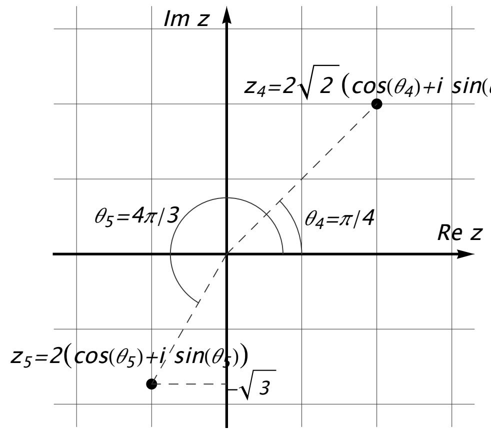
---

3. Si $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -2 + i$ et $z_3 = \sqrt{5} - i$, évaluer :
(a) $z_1^2 + z_2$
(b) $|\bar{z}_1|^2$
(c) $\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2$
(d) $|z_1 - z_3|$
(e) $|z_1(2 + z_2)|$
(f) $\mathrm{Re}\,(z_1 + 2z_2 + z_3)$
(g) $\mathrm{Im}\,(z_1/z_2)$
(h) $|z_1|^2 - i|z_3|^2$
(i) $(z_2/\bar{z}_2 + \bar{z}_2/z_2)$
(j) $(z_1 + \bar{z}_2)(z_2 + \bar{z}_3)$

4. Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes quelconques. Vérifier que :
(a) $z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2$ est un imaginaire pur, c'est-à-dire sa partie réelle est nulle ;
(b) $z_1/z_2 + \bar{z}_1/\bar{z}_2$ est un nombre réel, c'est-à-dire sa partie imaginaire est nulle ;
(c) la multiplication est associative : $(z_1 z_2)z_3 = z_1(z_2 z_3)$ et commutative : $z_1 z_2 = z_2 z_1$;
(d) $\overline{(z_1 z_2)} = (\overline{z_1})(\overline{z_2})$.

Chaque point de $\mathbb{C}$ peut être représenté par un point du plan. En effet, si on appelle x la partie réelle de z et y sa partie imaginaire, alors le nombre complexe z peut être représenté par le point de coordonnées (x, y) dans le plan. Alors l'axe horizontal correspond aux parties réelles des nombres complexes et l'axe vertical aux parties imaginaires. (Exercice : vérifier sur la figure ci-contre (à gauche) que les trois points dessinés correspondent bien à leur position le long des axes réel et imaginaire.) Outre cette *représentation cartésienne*, le nombre complexe z possède une *représentation polaire*, similaire à celle utilisée pour les points du plan xy. Soit donc $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où r est un nombre réel ≥ 0 et θ est un angle réel choisi tel que $0 \leq \theta < 2\pi$. Puisque la valeur absolue d'un nombre complexe $z = x + iy$ (de partie réelle x et imaginaire y) est $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, le nombre r est simplement $r = |z|$. (Ceux qui se rappellent la représentation polaire d'un vecteur (x, y) pourront faire le lien avec $(x, y) = r(\cos\theta, \sin\theta)$ où r est $\sqrt{x^2 + y^2}$.) L'angle doit être choisi pour que $x = \mathrm{Re}\,z = r\cos\theta$ et $y = \mathrm{Im}\,z = r\sin\theta$. Il faudra donc prendre la bonne branche de la fonction arctan pour que $\theta = \arctan y/x$ reproduise correctement x et y. La définition usuelle de arctan donne un résultat dans l'intervalle $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ et, pour couvrir tous les angles entre dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, un multiple entier de π devra peut-être ajouté à l'arctangente du quotient y/x. Ainsi





Représentation polaire : si $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels, alors ce nombre complexe peut être écrit comme $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec

$$x = r\cos\theta \qquad \text{et} \qquad y = r\sin\theta$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{et} \qquad \theta = \arctan y/x + n\pi, \ \text{ où } n \in \mathbb{Z}.$$

(Exercice : vérifier que les points marqués sur le graphique ci-contre (à droite) correspondent bien à leur représentation polaire.)

---

5. Utiliser le lien entre les nombres complexes et leur représentation cartésienne pour montrer que, pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:
(a) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;
(b) $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$;
(c) et montrer cette dernière relation directement à partir de la définition de la valeur absolue : $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

6. Soient $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, montrer que :
(a) $1/z_1 = (\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)/r_1$
(b) $\bar{z}_1 = r_1(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)$
(c) $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$
(d) $z_1/z_2 = r_1(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)/r_2$
(e) $z_1^n = (r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1))^n = r_1^n(\cos(n\theta_1) + i\sin(n\theta_1))$. Ceci est la formule de De Moivre.

Un nombre u est appelé une racine n-ième d'un nombre complexe si

$$u^n = z.$$

La représentation polaire permet de calculer les racines n-ièmes d'un nombre complexe. Pour un $z \neq 0$ donné, il existe n racines distinctes de l'équation $u^n = z$. Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, les racines sont

Les n racines n-ièmes de z sont :

$$u_k = r^{1/n}\left(\cos((\theta + 2\pi k)/n) + i\sin((\theta+2\pi k)/n)\right)$$

pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Le résultat ci-dessus découle de l'exercice 6 (e). Un autre résultat est intimement relié au précédent. Supposons que le développement en série de Taylor pour la fonction exponentielle

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ait un sens pour z un nombre imaginaire ($z = i\theta, \theta \in \mathbb{R}$) et qu'il soit possible d'intervertir l'ordre d'un nombre infini de termes de cette série (en d'autres termes, que la série soit absolument convergente). Alors on peut écrire pour $z = i\theta$:

$$\begin{aligned}
e^z = e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \ldots \\
&= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots\right) \\
&= \cos\theta + i\sin\theta
\end{aligned}$$

où, à la dernière étape, nous avons utilisé le développement de Taylor des fonctions sinus et cosinus.

Formule d'Euler :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

La formule d'Euler peut être utilisée pour écrire l'exponentielle d'un nombre complexe z quelconque. En effet, pour un $z = x + iy$ avec x et y réels, on a :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

---

7. Trouver les racines carrées et les racines cubiques de $1 + i$.

8. Donner la forme des n racines n-ièmes de l'unité, c'est-à-dire de $z = 1$, et vérifier que, pour $n = 4$, on a bien $u^4 = 1$ pour les quatre racines.

9. **(a)** Soit n pair. Montrer que la somme des n racines n-ièmes de l'unité égale à zéro. Suggestion : commencer par vérifier le résultat en dessinant les racines sixièmes de l'unité dans le plan complexe.
(b) Soit n impair. Montrer que la somme des n racines n-ièmes de l'unité égale à zéro. Note : cet exercice est plus difficile que le précédent.

10. Utiliser la formule d'Euler pour démontrer que
(a) $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
(b) $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$
(c) $\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta$
Note : pour les deux premiers de ces exercices, considérer les parties réelles et imaginaires de $e^{2i\theta} = e^{i\theta}e^{i\theta}$.

Solutions de quelques exercices

1. **(a)** $2-3i$
(c) $3-i$
(e) $2i$
(g) $(-2-4a)+i(8-a)$; si a est un nombre réel, alors la partie réelle du nombre proposé est $(-2-4a)$ et sa partie imaginaire est $(8-a)$. Si, cependant, a possède une partie imaginaire, alors la partie réelle du nombre proposé sera $(-2-4 \text{ Re } a + \text{Im } a)$ et sa partie imaginaire $(8 - \text{Re } a - 4 \text{ Im } a)$.

2. **(a)** 2
(c) $-5+i\sqrt{3}$
(e) $2i(bc-ad)/(c^2+d^2)$

3. **(a)** $-2-i$
(c) -6
(e) $\sqrt{2}$
(g) $\frac{1}{5}$
(i) $\frac{6}{5}$

4. **(a)** Si on pose $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ avec a_1, b_1, a_2, b_2 des nombres réels, alors $z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 = 2i(a_2b_1 - a_1b_2)$ qui est clairement un imaginaire pur.
(c) Et si $z_3 = a_3 + ib_3$, les deux membres de l'équation proposée sont :

$$(a_1a_2a_3 - a_3b_1b_2 - a_2b_1b_3 - a_1b_2b_3) + i(a_2a_3b_1 + a_1a_3b_2 + a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3).$$

5. **(a) et (b)** Si $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, ces deux relations sont des conséquences de l'inégalité du triangle pour les vecteurs $v_1 = (x_1, y_1)$ et $v_2 = (x_2, y_2)$. Par exemple, la première relation est pour un triangle dont deux des côtés vont de l'origine à v_1 et l'autre à $-v_2$. Le troisième côté va donc de v_1 à $-v_2$ et est de longueur $|v_1 - v_2| = |z_1 + z_2|$.

6. **(a)**

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1}{r_1(\cos\theta + i\sin\theta)} \cdot \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{1}{r_1}(\cos\theta - i\sin\theta).$$

(c)

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2\big((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\big) \\ &= r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)). \end{aligned}$$

7. En coordonnées polaires, le nombre $1+i$ s'écrit $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Donc ses racines carrées sont $2^{1/4}e^{i\pi/8}$ et $2^{1/4}e^{9i\pi/8}$.

8. Les n racines n-ièmes de 1 sont $u_k = e^{2ik\pi/n}$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Pour $n = 4$, cette expression devient $u_0 = 1$, $u_1 = e^{i\pi/2} = \cos\pi/2 + i\sin\pi/2 = i$ et, similairement $u_2 = -1$ et $u_3 = -i$. Clairement, pour ces quatre racines, on a bien $u_k^4 = 1$.

9. **(a)** Notons d'abord que $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$. Maintenant, si n est pair, il est de la forme $n = 2m$ pour un certain entier m. Alors les racines u_k et u_{k+m} s'annulent deux à deux dans la somme. En effet :

$$u_{k+m} = e^{2\pi i(k+m)/n} = e^{2\pi i(k+m)/(2m)} = e^{2\pi ik/(2m)+i\pi} = e^{2\pi ik/n}e^{i\pi} = -u_k.$$

Donc la somme des racines n-ièmes de 1 est nulle, car les m premières racines annulent les m dernières.