

## SOLUTIONNAIRE DU TP 9 - GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

[Chapitre 2, p.75, no 8]

**a** : Montrer que si deux surfaces  $M$  et  $M^*$  sont tangentes le long d'une courbe commune  $C$ , alors le transport parallèle le long de  $C$  est le même pour les deux surfaces.

**b** : Utiliser le résultat de la partie **a** afin de déterminer l'effet du transport parallèle le long du cercle de colatitude  $u = u_0$  de la sphère unité <sup>1</sup>.

*ERRATUM* : La solution à la partie **b** présentée ci-dessous est une version corrigée de celle présentée dans le solutionnaire du TP 8. L'erreur a été provoquée par le fait que le démonstrateur, s'appuyant trop sur ce qu'il avait écrit à l'exercice 7**b**, n'avait pas vu la faute rédactionnelle : la réponse est à comparer à la base *orientée*  $\{\mathbf{x}_v \mathbf{x}_u\}$  (implicitement) utilisée en 7**a**, et non à la base d'orientation inverse  $\{\mathbf{x}_u \mathbf{x}_v\}$ . Cela a conduit à de véritables erreurs dans les arguments de la question 8**b**.

RÉPONSE :

**a** : Le transport parallèle le long d'une courbe  $\alpha$  (disons paramétrée longueur d'arc) dans une surface  $S$  est complètement déterminé par la dérivée covariante sur  $S$ . Par définition de la dérivée covariante,

$$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} = D_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - [(D_{\mathbf{T}}\mathbf{X}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}.$$

Remarquons que la dérivée covariante ne dépend pas du choix de signe  $\pm\mathbf{n}$ . (C'est un signe du fait que la dérivée covariante peut être définie de manière intrinsèque, c'est-à-dire uniquement à l'aide de la première forme fondamentale.)

Dans le cas qui nous concerne, les deux surfaces  $M$  et  $M^*$  étant tangentes l'une à l'autre le long d'une courbe commune  $C$ , il s'avère que les champs vectoriels normaux  $\mathbf{n}_M$  et  $\mathbf{n}_{M^*}$  le long de  $C$  sont soit partout identiques, soit partout opposés. Dans les deux cas, les dérivées covariantes des deux surfaces le long de  $C$  sont identiques si les dérivées "ambiantes" sont identiques.

---

*Date*: 17 novembre 2015.

<sup>1</sup>Dans l'énoncé original de Shifrin, la latitude est plutôt considérée. Ce changement est fait par soucis de cohérence avec la Figure 1...

Or, c'est presque tautologique. En effet, soit  $\alpha(t)$  un paramétrage longueur d'arc de  $C$ . La dérivée "ambiante"  $(D_{\mathbf{T}}\mathbf{X})(t) = D_{\alpha'(t)}\mathbf{X}(t) = \frac{d\mathbf{X}}{dt}(t)$  ne dépend clairement d'aucune surface, seulement de  $\alpha$  et de  $\mathbf{X}$ .

**b** : Considérons le paramétrage suivant de la sphère :

$$\mathbf{x} : (0, \pi) \times [0, 2\pi] \rightarrow S^2 : (u, v) \mapsto (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u).$$

Ici,  $u$  est la colatitude sur la sphère. Considérons le cône circulaire droit tangent à la sphère unité le long du cercle de colatitude  $u = u_0$ . Par symétrie miroir avec l'équateur  $u = \pi/2$ , nous pouvons restreindre notre attention à  $0 < u_0 \leq \pi/2$  ; en effet, la réponse en  $u = \pi - u_0$  est alors la même en valeur absolue, mais de signe opposé.

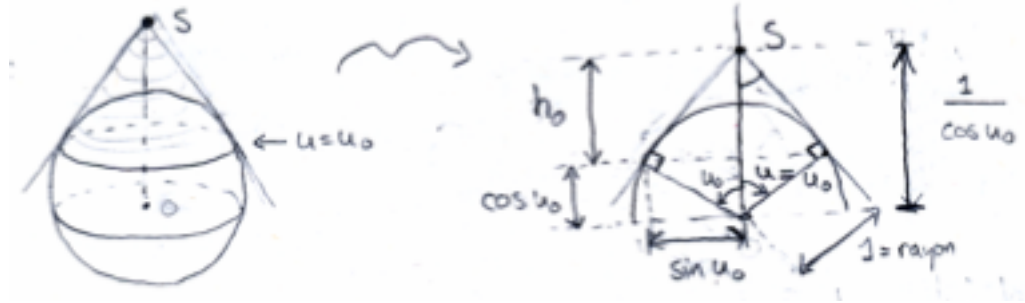


FIGURE 1

Par des calculs trigonométriques simples suggérés par la Figure 1, nous voyons que nous pouvons paramétrer le cône via

$$\mathbf{y} : (0, \infty) \times [0, 2\pi] \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3 : (w, v) \mapsto \left( w \cos v, w \sin v, -cw + \frac{1}{\cos u_0} \right)$$

où  $c$  est une constante choisie de telle sorte que pour  $w_0 = \sin u_0$ , nous ayons  $cw_0 = h_0 := \frac{1}{\cos u_0} - \cos u_0 = \sin u_0 \tan u_0$ . Bref,  $c = \tan u_0$ . Pour résumer,

$$\mathbf{y}(w, v) = \left( w \cos v, w \sin v, -w \tan u_0 + \frac{1}{\cos u_0} \right)$$

La partie **a** nous enseigne que le transport parallèle dans  $S^2$  le long de la boucle  $\alpha_{u_0}(t) = \mathbf{x}(u_0, t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , est le même que le transport parallèle

dans le cône  $M$  ci-dessus le long de la (même) boucle  $\alpha_{u_0}(t) = \mathbf{y}(w_0, t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

Or, l'exercice 7 du TP 8 nous indique que le transport parallèle le long de cette dernière boucle est donné par une rotation (dans  $T_{(\sin u_0, 0, \cos u_0)}M$ ) d'angle

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1 + (-c)^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + (\tan u_0)^2}} = 2\pi |\cos u_0| \stackrel{\text{ici}}{=} 2\pi \cos u_0.$$

Cet angle est exprimé par rapport à l'orientation donnée par la base  $\{\mathbf{y}_w, \mathbf{y}_v\}$ , qui s'avère être la même que l'orientation donnée par la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  (nous ne regardons que l'hémisphère nord  $0 < u_0 \leq \pi/2$  ici). Donc, pour l'orientation de  $S^2$  induite par le paramétrage  $\mathbf{x}$  (pour laquelle le vecteur normal est dirigé vers l'intérieur de la sphère), nous avons

$$\theta(u_0) = 2\pi \cos u_0, \quad \text{relation vraie pour tout } u_0 \in (0, \pi).$$

*Remarque* : Ce résultat n'est pas étranger à la précession du pendule de Foucault...

Tous les autres exercices de ce solutionnaire portant sur l'étude des géodésiques sur les surfaces de révolution, il est opportun de rappeler ici la Proposition 4.4 en page 73 des notes de cours de Shifrin.

**Relation de Clairaut :** Soit  $M \subset \mathbb{R}^3$  une surface de révolution. Pour toute géodésique<sup>2</sup>  $\alpha : I \rightarrow M : t \mapsto \alpha(t)$ , il existe une constante  $c = c(\alpha) \in \mathbb{R}$  telle que la relation (dite *de Clairaut*)

$$(\diamond) \quad r(t) \cos \phi(t) = c$$

est satisfaite tout le long de la géodésique, où  $r(t)$  est la distance du point  $\alpha(t)$  à l'axe de révolution de  $M$  et  $\phi(t)$  est l'angle entre le vecteur vitesse  $\alpha'(t)$  et le (vecteur vitesse pour le paramétrage privilégié choisi du) parallèle de  $M$  en  $\alpha(t)$ . De manière réciproque, si une courbe  $\alpha : I \rightarrow M$  vérifie une relation de la forme  $(\diamond)$  et qu'il ne s'agit pas d'un paramétrage d'un parallèle, alors il s'agit d'une géodésique.

Ce résultat est géométrique et ne dépend donc pas du paramétrage choisi pour  $M$ . Ceci dit, le paramétrage le plus simple d'une surface de révolution s'avère presque toujours être de la forme (en supposant que l'axe  $z$  est l'axe de révolution)

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)), \quad u \in (a, b) \subset \mathbb{R}, v \in [0, 2\pi].$$

Remarquons que  $f(u) = r(u)$  est la distance du point  $\mathbf{x}(u, v)$  à l'axe de révolution (l'axe  $z$  ici). Dès que nous en aurons le besoin, nous utiliserons un tel paramétrage.

Il est à noter que tous les méridiens d'une surface de révolution sont des géodésiques ; cela peut se vérifier directement, mais cela découle aussi du résultat ci-dessus, car un méridien vérifie  $\cos \phi(t) \equiv 0$  et satisfait donc trivialement  $(\diamond)$  avec  $c = 0$ .

Tous les parallèles d'une surface de révolution satisfont une relation de la forme  $(\diamond)$ , puisque  $r(t) = r$  est une constante pour un parallèle et  $\cos \phi(t) \equiv \pm 1$  (le signe correspondant au sens de parcours du paramétrage  $\alpha$ ). Pourtant, tous les parallèles ne sont pas des géodésiques : pour que ce soit le cas, il faut que le vecteur normal

---

<sup>2</sup>À strictement parler, une géodésique a été définie comme une courbe *paramétrée*, solution de l'équation différentielle  $\nabla_{\alpha'(t)} \alpha'(t) = 0$ . Or, par abus de langage, nous disons souvent que la courbe image d'une géodésique est la géodésique, qu'importe le paramétrage. Cela n'est pas étranger au fait que nous aurions pu définir une géodésique comme une solution de  $\nabla_{\alpha'(t)} \mathbf{T}(t) = 0$  ou comme courbe vérifiant  $\kappa_g(t) \equiv 0$ .

$\mathbf{n}$  à la surface soit, le long dudit parallèle, colinéaire au vecteur normal de Frenet  $\mathbf{N}$  du parallèle. Ceci se produit précisément pour les parallèles  $[u = u_0]$  où la fonction  $u \mapsto r(u)$  a un point critique, c'est-à-dire où  $r'(u_0) = 0$ .

Notons que la relation de Clairaut implique les corrélations suivantes entre les "évolutions" de  $r$  et de  $\phi$  :

$$r(t) \text{ augmente} \Leftrightarrow |\cos \phi(t)| \text{ diminue} \Leftrightarrow |\phi(t)| \text{ se rapproche de } \pi/2.$$

En particulier, une géodésique *donnée* tend à se comporter davantage comme un méridien là où  $r$  est grand et tend à se comporter davantage comme un parallèle là où  $r$  est petit. Cette compréhension approximative du comportement des géodésiques est très utile. Par exemple, nous pouvons en déduire (à l'aide aussi du paragraphe qui suit) que si une géodésique est tangente à un parallèle à un moment donné  $t$ , jamais elle ne franchira ce parallèle.

Rappelons finalement un dernier fait général, ne s'appliquant pas qu'aux surfaces de révolution :

pour tout point  $p \in M$  et tout vecteur tangent  $\mathbf{v} \in T_p M$ , il existe une et (essentiellement) une seule géodésique  $\alpha : I \rightarrow M$  passant par  $p$  avec vitesse  $\alpha' = \mathbf{v}$ .

Le "essentiellement" tient au fait que l'intervalle  $I$  n'est pas fixé, mais il ne s'agit que d'une technicité. Ce résultat implique aussi que deux géodésiques passant par un même point  $p$ , l'une avec vitesse  $\mathbf{v}$  et l'autre avec vitesse  $\lambda \mathbf{v}$ , tracent la même courbe dans  $M$ .

[Chapitre 2, p.77, no 22] À l'aide de la relation de Clairaut, décrire les géodésiques sur le tore, paramétré comme suit (où  $0 < b < a$  sont des constantes) :

$$\mathbf{x}(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u), \quad -\pi < u, v \leq \pi.$$

Quelles géodésiques n'intersectent jamais le parallèle extérieur  $[u = 0]$  ?

RÉPONSE :

Comme pour toute surface de révolution, tous les méridiens sont des géodésiques, qui correspondent à  $\cos \phi \equiv 0$ . Par l'unicité des géodésiques, il en résulte qu'aucune autre géodésique ne peut satisfaire  $\cos \phi = 0$  à un quelconque "moment".

La fonction  $u \mapsto r(u) = a + b \cos u$  a deux points critiques, à savoir  $[u = 0]$  (qui correspond au parallèle extérieur de rayon  $a + b$ ) et  $[u = \pi]$  (qui correspond au parallèle intérieur de rayon  $a - b$ ). Aucune autre géodésique ne peut être éventuellement tangente à l'un de ces deux parallèles sans être précisément ce parallèle, unicité des géodésiques oblige. Aucun autre parallèle n'est une géodésique, donc il est possible que certaines géodésiques soient de temps à autre tangentes à l'un de ces autres parallèles.

Nous pouvons donc concentrer notre attention sur les autres géodésiques. Nous n'allons étudier que les géodésiques qui, au "temps"  $t = 0$ , se trouvent sur le parallèle extérieur  $[u = 0]$  (qui a rayon  $r(0) = a + b$ ). Il s'avère que nous n'oublions aucune géodésique en effectuant cette restriction, fait qui émanera de nos considérations à venir (bien qu'il ne s'agira pas d'une démonstration formelle de ce fait). Notons  $\phi_0$  l'angle avec lequel la géodésique d'intérêt quitte, au temps  $t = 0$ , le parallèle  $[u = 0]$ . Considérons trois cas distincts<sup>3</sup> :

$$1 > \cos \phi_0 > \frac{a-b}{a+b} :$$

Dans ce cas, la géodésique doit probablement "ressembler" à un parallèle. Allons plus en détails. La relation de Clairaut nous apprend que partout le long de la géodésique

$$c = r(t) \cos \phi(t) = r(0) \cos \phi(0) = (a + b) \cos \phi_0 > a - b.$$

---

<sup>3</sup>Les cas  $\cos \phi_0 = 1$  et  $\cos \phi_0 = 0$  correspondant respectivement au parallèle extérieur et au méridien, nous ne nous y attardons pas davantage.

(Ici, si la géodésique est de la forme  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ , nous avons noté  $r(t) = r(u(t))$ .) Or, puisque  $1 \geq \cos \phi$ , nous en déduisons que pour tout  $t$ ,  $r(t) > a - b$ . Ainsi, la géodésique n'atteint jamais le parallèle intérieur  $[u = \pi]$ . Puisque  $\cos \phi(t) = 1$  lorsque  $r(u(t)) = c$ , la géodésique fait des va-et-vients entre les parallèles  $u_{max} = \arccos[(c - a)/b]$  et  $u_{min} = -\arccos[(c - a)/b]$ . La Figure 2 (gracieuseté d'Yvan Saint-Aubin) illustre la situation

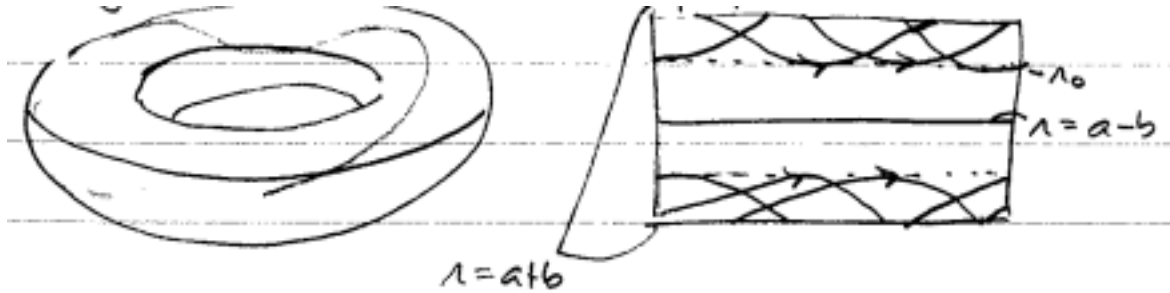


FIGURE 2

$$\cos \phi_0 = \frac{a-b}{a+b} :$$

La relation de Clairaut nous apprend que partout le long de la géodésique

$$c = r(t) \cos \phi(t) = r(0) \cos \phi(0) = (a + b) \cos \phi_0 = a - b .$$

Remarquons que sur le tore,  $r \geq a - b$ . Dans le cas présent, tant et aussi longtemps que  $r(t) > a - b$ ,  $\cos \phi(t) < 1$ , c'est-à-dire que la géodésique n'est pas tangente à un parallèle. Ainsi, la géodésique s'approche de plus en plus du parallèle intérieur  $[u = \pi]$ . Elle ne l'atteint cependant jamais : en effet, si elle l'atteignait, alors  $r(t) = a - b$  et  $\cos \phi(t) = 1$ , de sorte qu'elle serait tangente au parallèle en ce temps  $t$  et donc, par unicité des géodésiques, coïnciderait avec ce parallèle en tout temps. Bref, la géodésique s'approche asymptotiquement du parallèle interne, comme l'illustre la Figure 3.

$$\frac{a-b}{a+b} > \cos \phi_0 > 0 :$$

Dans ce cas, la géodésique franchit vraisemblablement le parallèle interne  $[u = \pi]$  ; confirmons-le. La relation de Clairaut nous apprend que

$$c = r(t) \cos \phi(t) = r(0) \cos \phi(0) = (a + b) \cos \phi_0 < a - b .$$

Ainsi, en divisant par  $r(t)$  (qui est strictement positif), nous avons  $\cos \phi(t) < (a - b)/r(t) \leq 1$  (la seconde inégalité stipule seulement que  $a - b \leq r(t)$ ).

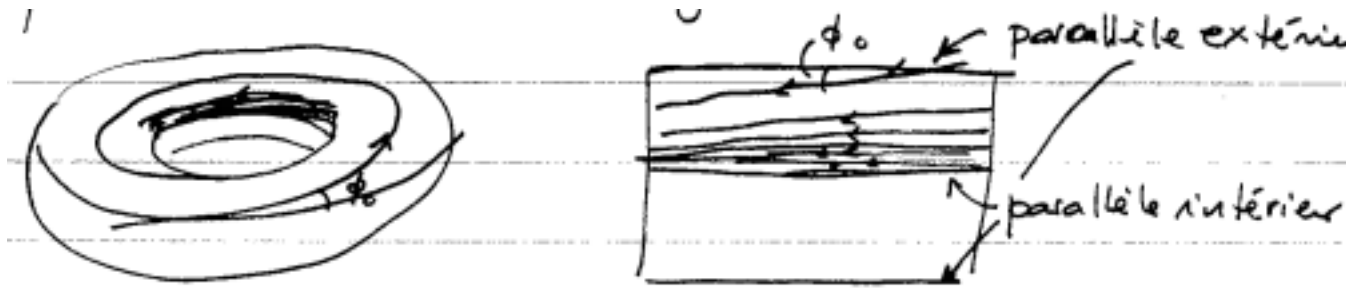


FIGURE 3

Ainsi, il n'existe aucun temps  $t$  pour lequel  $\phi(t) = 0$  ou  $\phi(t) = \pi$ , bref aucun temps  $t$  pour lequel la géodésique n'est tangente à un parallèle. La géodésique intersecte donc tous les parallèles, une infinité de fois, comme le relate la Figure 4.



FIGURE 4

Il est vraisemblable que la géodésique dépende de manière continue de l'angle initial  $\phi_0$  et du point de départ  $p_0 \in [u = 0]$ . Par ailleurs, les trois cas ci-dessus suggèrent qu'en choisissant  $p_0$  et  $\phi_0$  convenablement, il est possible d'obtenir une géodésique  $\alpha$  passant par le point  $p$  de notre choix avec la vitesse  $\mathbf{v}$  de notre choix. Ainsi, il semble bel et bien que nous ayons considéré toutes les géodésiques sur le tore. Nous voyons aussi que la seule géodésique qui ne croise jamais le parallèle extérieur est le parallèle intérieur.



[Chapitre 2, p.78, no 23] Soit  $M$  la surface de révolution donnée par

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)), \quad u \in (a, b) \subset \mathbb{R}, v \in [0, 2\pi].$$

Considérons une (portion de) géodésique  $\Gamma$  qui n'est jamais tangente à un parallèle ; dans ce cas, il est possible de paramétrer cette (portion de) géodésique par une fonction de la forme  $\alpha(u) = \mathbf{x}(u, v(u))$ , avec  $u \in (u_i, u_f) \subset (a, b)$ . En notant  $c = c(\Gamma)$  la "constante de Clairaut" de cette géodésique, montrer que

$$v(u_f) = v(u_i) + c \int_{u_i}^{u_f} \frac{\sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2}}{f(u) \sqrt{f(u)^2 - c^2}} du.$$

RÉPONSE :

Nous aurons besoin de l'expression pour la première forme fondamentale :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u)), \quad \mathbf{x}_v = f(u)(-\sin v, \cos v, 0), \\ I(u, v) &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(u)^2 + g'(u)^2 & 0 \\ 0 & f(u)^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarquons que  $\mathbf{x}_u$  est tangent aux méridiens et que  $\mathbf{x}_v$  est tangent aux parallèles. Considérons le produit scalaire

$$\alpha'(u) \cdot \mathbf{x}_v(u, v(u)) = \|\alpha'\| \|\mathbf{x}_v\| \cos \phi(u) = \|\alpha'\| f(u) \cos \phi(u) \stackrel{(\diamond)}{=} \|\alpha'\| c.$$

Par ailleurs,  $\alpha'(u) = \mathbf{x}_u(u, v(u))u' + \mathbf{x}_v(u, v(u))v'$  (où nous avons  $u' = 1$  puisque la dérivation est faite par rapport à  $u$ , mais nous garderons ce terme explicitement, car l'argument est vrai qu'importe le paramètre et que cette généralité nous servira dans les questions à venir). Ainsi, nous calculons

$$\begin{aligned} \|\alpha'\| &= \sqrt{\|\alpha'\|^2} = \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} = \sqrt{E(u')^2 + G(v')^2}, \\ \alpha' \cdot \mathbf{x}_v &= Fu' + Gv' = Gv'. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi deux expressions pour le produit scalaire  $\alpha' \cdot \mathbf{x}_v$ . En les élevant au carré, nous obtenons l'égalité

$$(E(u')^2 + G(v')^2)c^2 = G^2(v')^2 \implies (v')^2 = \frac{Ec^2}{G(G - c^2)}(u')^2.$$

En prenant la racine carrée directement, nous perdons une connaissance sur le signe relatif des deux membres de l'égalité. Revenons plutôt à l'égalité avant l'élevation au carré et utilisons notre réponse afin d'explicitier l'égalité :

$$v' = \frac{c \|\alpha'\|}{G} = c \frac{\sqrt{E(u')^2 + \frac{Ec^2}{G-c^2}(u')^2}}{G} = c \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G(G-c^2)}} |u'| \stackrel{\text{ici}}{=} c \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G(G-c^2)}}.$$

Nous avons (enfin) utilisé le fait que  $u' = 1$ . Ainsi,

$$dv = c \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G(G-c^2)}} du = c \frac{\sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2}}{f(u)\sqrt{f(u)^2 - c^2}} du.$$

En intégrant chaque membre entre les valeurs correspondantes, nous obtenons la formule recherchée.

[Chapitre 2, p.78, no 26] Soit  $M$  l'hyperboloïde à une nappe  $x^2 + y^2 = 1 + z^2$ , qui admet comme paramétrage

$$\mathbf{x}(u, v) = (\sqrt{1 + u^2} \cos v, \sqrt{1 + u^2} \sin v, u), \quad u \in \mathbb{R}, v \in [0, 2\pi],$$

et  $C$  le cercle d'équations  $x^2 + y^2 = 1$  et  $z = 0$ , qui est un parallèle de  $M$ .

**a :** Utiliser la relation de Clairaut afin de montrer qu'à l'exception de  $C$ , toutes les géodésiques ne sont pas bornées.

**b :** Montrer qu'il y a des géodésiques s'approchant asymptotiquement de  $C$ .

RÉPONSE :

Comme toujours, les méridiens sont des géodésiques, d'intérêt limité ici. Notons que la fonction  $u \mapsto r(u) = \sqrt{1 + u^2}$  est paire et est strictement croissante pour  $u > 0$ , donc elle est strictement décroissante pour  $u < 0$  et son unique point critique est  $u = 0$ . Ainsi, le seul parallèle qui soit une géodésique est  $C$ .

**a :** Soit  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$  une géodésique<sup>4</sup> différente de  $C$ . Il ne s'agit donc pas non plus d'un parallèle. Ainsi, il existe  $t_0 \in (a, b)$  tel que  $\alpha(t_0) \notin C$  et  $\cos \phi(t_0) \neq \pm 1$ . En d'autres termes,  $\alpha$  n'est pas horizontale au moment  $t_0$ . Par continuité de  $\alpha$ ,  $\cos \phi(t) \neq \pm 1$  pour tout  $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$  pour  $\epsilon > 0$  assez petit.

Forcément, il y a  $t_1 = t_0 + \delta$  dans cet intervalle ( $\delta$  est peut-être négatif) tel que  $r(t_1) > r(t_0)$ , donc  $|\phi(t_1)| > |\phi(t_0)| > 0$ . En d'autres termes, la géodésique se redresse davantage, se comporte de plus en plus comme un méridien. Nous voyons bien que l'argument peut être réitéré ; faisons-le un peu proprement. Puisque  $|\cos \phi(t_1)| < |\cos \phi(t_0)| < 1$ , il s'avère que  $\cos \phi(t) \neq \pm 1$  sur l'intervalle  $(t_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon)$  **pour le même**  $\epsilon$ . Ainsi, par monotonie de la fonction  $u \mapsto r(u)$ , pour  $t_2 = t_1 + \delta$  **avec le même**  $\delta$ , nous avons  $r(t_2) > r(t_1)$  et donc  $|\cos \phi(t_2)| < |\cos \phi(t_1)| < 1$ .

Un argument par récurrence est clairement possible. Intuitivement, il en résulte en fait que soit sur l'intervalle  $(-\infty, t_0)$ , soit sur l'intervalle  $(t_0, \infty)$ , la géodésique s'aventure dans des régions où  $r$  est de plus en plus grand. Puisque  $|z|$  croît avec  $r$ , nous voyons que la géodésique s'aventure de plus en plus loin en  $|z|$ , en se redressant d'autant plus et donc s'éloignant encore plus rapidement. La géodésique n'est pas bornée.

---

<sup>4</sup>Puisque l'hyperboloïde n'a pas de frontière ni de trou, toutes ses géodésiques sont définies "en tout temps".

**b :** Dans l'argument ci-dessus, l'autre moitié de la géodésique s'approche, du moins pendant un certain temps, du cercle  $C$ . Certaines géodésiques franchissent  $C$  et s'aventurent vers l'infini de l'autre hémisphère de la surface, d'autres rebroussement chemin avant d'atteindre  $C$  et retournent vers l'infini d'où elles proviennent. Certaines convergent cependant asymptotiquement vers  $C$ , sans jamais l'atteindre, mais sans jamais rebrousser chemin.

Supposons qu'une telle géodésique  $\Gamma$  existe et soit  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma : s \mapsto \alpha(s)$  un paramétrage longueur d'arc. Ce faisant,  $\|\alpha'\| = 1$ . Or, nous avons trouvé une expression pour  $\|\alpha'\|$  dans notre solution de l'exercice 23 :

$$1 \stackrel{\text{ici}}{=} \|\alpha'\| = \sqrt{\frac{E}{G - c^2}} \left| \frac{du}{ds} \right| \stackrel{\text{ici}}{=} \sqrt{\frac{\frac{u^2}{1+u^2} + 1}{1 + u^2 - c^2}} \left| \frac{du}{ds} \right|.$$

Au fur et à mesure que  $\alpha$  se rapproche de  $C$ ,  $u$  tend vers 0, donc  $du/ds$  aussi. Puisque 1 est une constante, cela force  $1 + u^2 - c^2$  à tendre vers 0. Cela n'est possible que si  $c = \pm 1$ .

La démarche de l'exercice 23, bien utilisée, montre que les géodésiques vérifiant  $c = \pm 1$  (dont nous vérifions facilement l'existence) convergent bel et bien asymptotiquement vers  $C$ . Alternativement, nous pouvons utiliser une démarche basée directement sur la relation de Clairaut et similaire à celle considérée pour le tore de l'exercice 22 afin d'aboutir à ce résultat.

[Chapitre 2, p.78, no 24] Soit  $M \subset \mathbb{R}^3$  la pseudo-sphère donnée par le paramétrage

$$\mathbf{x}(u, v) = (\operatorname{sech} u \cos v, \operatorname{sech} u \sin v, u - \tanh u), \quad u \in (0, \infty), v \in [0, 2\pi].$$

Utiliser l'exercice 23 afin d'écrire des équations pour ses géodésiques. En déduire que les seules géodésiques qui ne sont pas bornées sont les méridiens  $[v = v_0]$ .

RÉPONSE :

Ici,  $f(u) = r(u) = \operatorname{sech} u$  et  $f'(u)^2 + g'(u)^2 = (-\operatorname{sech} u \tanh u)^2 + (1 - (\operatorname{sech} u)^2)^2 = (\tanh u)^2$ . Notons que la fonction  $u \mapsto r(u)$  est strictement décroissante, de sorte qu'aucun parallèle n'est une géodésique. Par ailleurs,  $\lim_{u \rightarrow \infty} r(u) = 0$ , donc si  $c(\Gamma) \neq 0$ , c'est-à-dire si  $\Gamma$  n'est pas un méridien, il faut forcément que  $r$  atteigne un minimum strictement positif (de valeur  $|c(\Gamma)|$ ) le long de  $\Gamma$  ; la géodésique est incapable de s'aventurer trop loin dans la pseudo-sphère, elle est bornée.

Par la formule de l'exercice 23 (et sous les hypothèse où elle s'applique), nous calculons pour  $c \neq 0$  (le cas  $c = 0$  est trivial, correspondant aux méridiens)

$$\begin{aligned} v(u_f) - v(u_i) &= c \int_{u_i}^{u_f} \frac{|\tanh u|}{\operatorname{sech} u \sqrt{(\operatorname{sech} u)^2 - c^2}} du \stackrel{u \geq 0}{=} c \int_{u_i}^{u_f} \frac{\tanh u}{\operatorname{sech} u \sqrt{(\operatorname{sech} u)^2 - c^2}} du \\ &= c \int_{u_i}^{u_f} \frac{\sinh u}{\sqrt{(\operatorname{sech} u)^2 - c^2}} du = \int_{u_i}^{u_f} \frac{c \sinh u \cosh u}{\sqrt{1 - c^2(\cosh u)^2}} du \\ &= -\frac{1}{c} \int_{u=u_i}^{u=u_f} d\left(\sqrt{1 - c^2(\cosh u)^2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{1 - c^2(\cosh u_i)^2} - \sqrt{1 - c^2(\cosh u_f)^2}}{c}. \end{aligned}$$

Nous voyons que l'intégrande n'est pas définie si  $(\operatorname{sech} u)^2 = c^2$ , ce qui correspond comme nous l'avons mentionné au moment où  $\cos \phi = 1$ . (Remarquons que  $1 > r \geq |c| \cos \phi = |c|$ , de sorte que  $1 > |c|$ . Ainsi, si  $|c| > 0$ , l'équation  $(\operatorname{sech} u)^2 = c^2$  a une solution, ce qui montre d'une manière légèrement différente que les géodésiques sont bornées.)

Considérons finalement le cas où les limites  $u_i \rightarrow 0^+$  et  $u_f \rightarrow u_{max}^-$  sont prises ( $u_{max}$  étant la solution positive de  $(\operatorname{sech} u)^2 = c^2$ ). Nous pouvons montrer que la longueur de la géodésique est finie. Ainsi, les géodésiques quitte le bord de la pseudo-sphère pour y revenir en un "temps" fini, ou plutôt en une distance finie. Cela montre que la pseudo-sphère n'est pas *géodésiquement complète*.