

SOLUTIONNAIRE DU TP 7 - GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

[Chapitre 2, p.53, no 3] Calculer la seconde forme fondamentale II_P des surfaces paramétrées suivantes. Calculer ensuite la matrice de l'opérateur de forme et déterminer les courbures moyenne H et gaussienne K .

a : Le cylindre : $\mathbf{x}(u, v) = (a \cos u, a \sin u, v)$

c : L'hélicoïde : $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv)$

d : La caténoïde : $\mathbf{x}(u, v) = (a \cosh u \cos v, a \cosh u \sin v, au)$

RÉPONSE :

a :

$$\mathbf{x}_u = (-a \sin u, a \cos u, 0) \quad ; \quad \mathbf{x}_v = (0, 0, 1)$$

$$\mathbf{x}_{uu} = (-a \cos u, -a \sin u, 0) \quad ; \quad \mathbf{x}_{uv} = (0, 0, 0) \quad ; \quad \mathbf{x}_{vv} = (0, 0, 0)$$

$$E = a^2 \quad ; \quad F = 0 \quad ; \quad G = 1 \quad \Rightarrow \quad I = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad I^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/a^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (a \cos u, a \sin u, 0) \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| = a \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} = (\cos u, \sin u, 0)$$

$$l = -a \quad ; \quad m = 0 \quad ; \quad n = 0 \quad \Rightarrow \quad II = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = I^{-1}II = \begin{pmatrix} -1/a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad K = \det S = 0 \quad ; \quad H = \frac{1}{2} \operatorname{tr} S = \frac{-1}{2a} .$$

c :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= (\cos v, \sin v, 0) \quad ; \quad \mathbf{x}_v = (-u \sin v, u \cos v, b) \\ \mathbf{x}_{uu} &= (0, 0, 0) \quad ; \quad \mathbf{x}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0) \quad ; \quad \mathbf{x}_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0)\end{aligned}$$

$$E = 1 \quad ; \quad F = 0 \quad ; \quad G = u^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow I^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/(u^2 + b^2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (b \sin v, -b \cos v, u) \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| = \sqrt{u^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{n} = (b \sin v, -b \cos v, u) / \sqrt{u^2 + b^2}$$

$$l = 0 \quad ; \quad m = -b/\sqrt{u^2 + b^2} \quad ; \quad n = 0 \quad \Rightarrow \quad II = \frac{-b}{\sqrt{u^2 + b^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = I^{-1}II = \frac{-b}{\sqrt{u^2 + b^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/(u^2 + b^2) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow K = \det S = -b^2/(u^2 + b^2)^2 \quad ; \quad H = \frac{1}{2} \operatorname{tr} S = 0.$$

d :

$$\mathbf{x}_u = (a \sinh u \cos v, a \sinh u \sin v, a) \quad ; \quad \mathbf{x}_v = (-a \cosh u \sin v, a \cosh u \cos v, 0)$$

$$\mathbf{x}_{uu} = (a \cosh u \cos v, a \cosh u \sin v, 0) \quad ; \quad \mathbf{x}_{uv} = (-a \sinh u \sin v, a \sinh u \cos v, 0) \quad ;$$

$$\mathbf{x}_{vv} = (-a \cosh u \cos v, -a \cosh u \sin v, 0)$$

$$E = a^2(\cosh u)^2 \quad ; \quad F = 0 \quad ; \quad G = a^2(\cosh u)^2 \quad \Rightarrow \quad I = a^2(\cosh u)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow I^{-1} = a^{-2}(\cosh u)^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (-a^2 \cosh u \cos v, -a^2 \cosh u \sin v, a^2 \cosh u \sinh u)$$

$$\Rightarrow \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| = a^2(\cosh u)^2 \Rightarrow \mathbf{n} = (-\operatorname{sech} u \cos v, -\operatorname{sech} u \sin v, \tanh u)$$

$$l = -a \quad ; \quad m = 0 \quad ; \quad n = a \quad \Rightarrow \quad II = a \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = I^{-1}II = a^{-1}(\cosh u)^{-2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow K = \det S = -a^{-2}(\cosh u)^{-4} \quad ; \quad H = \frac{1}{2} \operatorname{tr} S = 0.$$

Remarques :

1) Nous voyons que tant l'hélicoïde que la caténoïde ont une courbure moyenne H partout nulle ; ce faisant, il s'agit de surfaces minimales. Cette terminologie vient du fait qu'on peut démontrer qu'une surface vérifiant $H \equiv 0$ minimise localement sa surface : en prenant n'importe quelle courbe fermée simple C (suffisamment petite) sur la surface, il n'y a aucune autre surface contenant C et attribuant à la partie "intérieure" de C une aire plus petite. D'un point de vue physique, si cette courbe devait être trempée dans de l'eau savonnée, la pellicule qui se formerait prendrait la forme minimisant la superficie (car il s'agirait de la forme minimisant les forces de tension dans la pellicule). Les figures 1 et 2 en fin de document illustrent le phénomène¹. Dans \mathbb{R}^3 , d'autres surfaces minimales *ouvertes* (c'est-à-dire ne s'intersectant pas et ne se fermant pas sur elles-mêmes) existent : le plan est un exemple évident, mais les surfaces de Scherk seraient d'autres exemples moins triviaux.

2) L'hélicoïde et la caténoïde sont liées l'une à l'autre d'une façon bien plus profonde... lien remarquable que nous aurons probablement l'occasion de dévoiler dans quelques cours !

¹Les deux figures ont été tirées des articles Wikipédia francophones intitulés "Hélicoïde" et "Caténoïde" en date du 11 octobre 2014.

[Chapitre 2, p.53, no 4] Poursuivant sur l'exercice 3c, trouver les courbures principales, les directions principales et les directions asymptotiques de l'hélicoïde $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv)$. Expliciter les lignes de courbure et les lignes asymptotiques si possible.

RÉPONSE :

L'opérateur de forme s'exprime dans ce paramétrage

$$S = S(u, v) = \frac{-b}{\sqrt{u^2 + b^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/(u^2 + b^2) & 0 \end{pmatrix}.$$

Les courbures principales au point $P = \mathbf{x}(u, v)$ sont les valeurs propres de cette matrice, tandis que les directions propres sont les vecteurs propres correspondants. Le polynôme caractéristique est

$$\begin{aligned} P_S(t) = \det(S - t\text{Id}) &= \begin{vmatrix} -t & \frac{-b}{\sqrt{u^2 + b^2}} \\ \frac{-b}{(u^2 + b^2)^{3/2}} & -t \end{vmatrix} = t^2 - \frac{b^2}{(u^2 + b^2)^2} \\ &= \left(t - \frac{b}{u^2 + b^2}\right) \left(t + \frac{b}{u^2 + b^2}\right). \end{aligned}$$

Les courbures principales de la surface, c'est-à-dire les valeurs propres de S , sont les zéros ce polynôme, à savoir $k_1(u, v) = -\frac{b}{u^2 + b^2}$ et $k_2(u, v) = \frac{b}{u^2 + b^2}$. Pour la suite de ce numéro, notons-les respectivement k_- et k_+ . Les directions propres correspondantes \mathbf{v}_\pm vérifient, respectivement,

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = (S - k_\pm \text{Id})\mathbf{v}_\pm &= \begin{pmatrix} \mp \frac{b}{u^2 + b^2} & \frac{-b}{\sqrt{u^2 + b^2}} \\ \frac{-b}{(u^2 + b^2)^{3/2}} & \mp \frac{b}{u^2 + b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\pm \\ b_\pm \end{pmatrix} \\ &= -\frac{b}{u^2 + b^2} \begin{pmatrix} \pm 1 & \sqrt{u^2 + b^2} \\ \frac{1}{\sqrt{u^2 + b^2}} & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\pm \\ b_\pm \end{pmatrix} = -\frac{b}{u^2 + b^2} \begin{pmatrix} \pm a_\pm + \sqrt{u^2 + b^2} b_\pm \\ \frac{a_\pm}{\sqrt{u^2 + b^2}} \pm b_\pm \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les solutions à ces deux équations vectorielles sont respectivement de la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_+ &= a_+ \mathbf{x}_u + b_+ \mathbf{x}_v = b_+ (-\sqrt{u^2 + b^2} \mathbf{x}_u + \mathbf{x}_v), \quad b_+ \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{v}_- &= a_- \mathbf{x}_u + b_- \mathbf{x}_v = b_- (\sqrt{u^2 + b^2} \mathbf{x}_u + \mathbf{x}_v), \quad b_- \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nous pouvons fixer b_+ et b_- afin d'obtenir des vecteurs *normés selon le produit scalaire I* ; en vertu de nos calculs effectués en **3c**,

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{x}(u,v)}(\mathbf{v}_\pm, \mathbf{v}_\pm) &= b_\pm^2 (\mp\sqrt{u^2 + b^2} \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mp\sqrt{u^2 + b^2} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= b_\pm^2 [(\sqrt{u^2 + b^2})^2 + (u^2 + b^2)] = 2(u^2 + b^2)b_\pm^2 \stackrel{\text{veut}}{=} 1 \\ &\Rightarrow b_\pm = \frac{1}{\sqrt{2(u^2 + b^2)}}. \\ &\Rightarrow \mathbf{v}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mp \mathbf{x}_u + \frac{1}{\sqrt{u^2 + b^2}} \mathbf{x}_v \right). \end{aligned}$$

Évidemment, multiplier l'un ou l'autre de ces vecteurs par -1 donne lieu à une réponse tout aussi légitime ; nous pourrions spécifier un peu plus notre réponse en exigeant d'avoir $\mathbf{v}_+ \times \mathbf{v}_- = \mathbf{n}$, mais ce choix serait quelque peu arbitraire...

Les directions asymptotiques correspondent aux vecteurs envoyés par S perpendiculairement (selon I) à eux-mêmes. Plutôt que de se lancer dans un calcul similaire à celui nous ayant permis d'identifier les vecteurs propres, remarquons qu'il s'agit des directions le long desquelles la courbure normale est nulle. Il s'agit donc des vecteurs $\cos(\theta)\mathbf{v}_+ + \sin(\theta)\mathbf{v}_-$ vérifiant, en vertu de la formule d'Euler, la relation $k_+(\cos \theta)^2 + k_-(\sin \theta)^2 = 0$, c'est-à-dire

$$0 = \frac{b}{u^2 + b^2} ((\cos \theta)^2 - (\sin \theta)^2) \Leftrightarrow \sin \theta = \pm \cos \theta \Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\frac{\pi}{2}}.$$

Bref, les directions asymptotiques sont

$$\begin{aligned} A_1 &= \cos \frac{\pi}{4} \mathbf{v}_+ + \sin \frac{\pi}{4} \mathbf{v}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{v}_+ + \mathbf{v}_-) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + b^2}} \mathbf{x}_v, \\ A_2 &= \cos \frac{3\pi}{4} \mathbf{v}_+ + \sin \frac{3\pi}{4} \mathbf{v}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-) = -\mathbf{x}_u. \end{aligned}$$

Alternativement, dans le cas présent, puisque la matrice Π n'a que des zéros sur sa diagonales, nous pouvons immédiatement savoir que les deux directions asymptotiques étaient les directions coordonnées.

Les lignes asymptotiques, c'est-à-dire les courbes $t \mapsto \alpha(t)$ sur la surface dont le vecteur tangent $\alpha'(t)$ pour tout t est une direction asymptotique à la surface au point $\alpha(t)$, sont donc très simples à identifier dans le cas présent : il s'agit des lignes de coordonnées ! Ainsi, les courbes $[v = \text{constante}]$ (les “ u -curves”), à savoir les “rayons”

de l'hélicoïde, sont des courbes asymptotiques (sans surprise, puisque qu'une droite dans une surface est toujours une courbe asymptotique). Plus surprenant est que les courbes $[u = \text{constante}]$ (les " v -curves"), à savoir les hélices de l'hélicoïde, en sont aussi ; cela signifie que le vecteur normal \mathbf{N} d'une hélice est partout tangent à l'hélicoïde, de sorte que "les hélices ne courbent qu'à l'intérieur de l'hélicoïde".

Malheureusement, il n'est pas aussi simple ici d'identifier quelles sont les lignes de courbure, c'est-à-dire les courbes $t \mapsto \alpha(t)$ sur la surface dont le vecteur tangent $\alpha'(t)$ pour tout t est une direction principale à la surface au point $\alpha(t)$. Supposons que $s \mapsto \alpha(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$ est une telle courbe, paramétrée par longueur d'arc. Ainsi, son vecteur vitesse $\alpha'(s) = u'(s)\mathbf{x}_u(u(s), v(s)) + v'(s)\mathbf{x}_v(u(s), v(s))$ est unitaire et doit donc être égal à \mathbf{v}_+ ou \mathbf{v}_- (le choix de $+$ ou $-$ ne change pas le long de α , puisque la dérivée est continue et les deux directions principales sont perpendiculaires). Ainsi,

$$u'(s) = \frac{\mp 1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad v'(s) = \frac{1}{\sqrt{2(u(s)^2 + b^2)}}.$$

Il s'agit d'un système d'équations différentielles pour une courbe $s \mapsto (u(s), v(s))$ dans \mathbb{R}^2 , courbe qui représente α dans le système de coordonnées (u, v) .

La première équation s'intègre aisément, donnant lieu à $u(s) = u(0) \mp s/\sqrt{2}$ où $u(0)$ est une constante d'intégration. Quitte à reparamétriser la courbe $s \mapsto s \pm \sqrt{2}u(0)$, nous voyons que nous pouvons supposer $u(0) = 0$. En insérant cette expression dans la seconde équation différentielle, nous obtenons

$$v'(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 2b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}b} \left(1 + \left(\frac{s}{\sqrt{2}b} \right)^2 \right)^{-1/2} \Rightarrow v(s) = v(0) + \frac{1}{\sqrt{2}b} \operatorname{arcsinh} \frac{s}{\sqrt{2}b}.$$

Ainsi, les lignes de courbure suivant la direction principale \mathbf{v}_\pm sont données par

$$\begin{aligned} \alpha_{\pm, v(0)}(s) &= \mathbf{x} \left(\mp \frac{s}{\sqrt{2}}, v(0) + \frac{1}{\sqrt{2}b} \operatorname{arcsinh} \frac{s}{\sqrt{2}b} \right) \\ &= \mp \frac{s}{\sqrt{2}} (\cos v(s), \sin v(s), 0) + \left(0, 0, bv(0) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsinh} \frac{s}{\sqrt{2}b} \right). \end{aligned}$$

Il est laissé à la discrétion du lecteur de récrire cette expression sous une autre forme.

[Chapitre 2, p.54, no 10] Considérer la surface réglée M donnée par $\mathbf{x}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, uv)$, $v > 0$.

- a** : Décrire cette surface géométriquement.
- b** : Trouver la première et la seconde formes fondamentales ainsi que la courbure gaussienne de M .
- c** : Vérifier que les courbes $\{u = \text{constante}\}$ (les “ v -curves”) sont des lignes de courbure.
- d** : En procédant de façon analogue à ce fait dans l'exemple 6, montrer que les autres lignes de courbure sont données par l'équation $v\sqrt{1+u^2} = c$ pour diverses constantes c . Montrer que ces courbes sont les intersections de M avec les sphères $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$.

RÉPONSE :

a : Nous pouvons récrire le paramétrage comme $\mathbf{x}(u, v) = v(\cos u, \sin u, u)$, de sorte qu'il s'agit bien d'une surface réglée : $\mathbf{x}(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$ avec $\alpha = 0$ et $\beta(u) = (\cos u, \sin u, u)$. Le fait que $\alpha = 0$ signifie que toutes les droites $v\beta(u_0)$ passent par l'origine de \mathbb{R}^3 , donnant une allure cônica à la surface. Pour mieux comprendre l'apparence de cette surface, normalisons β afin d'obtenir une fonction vectorielle de norme 1 : $\bar{\beta}(u) = \beta(u)/\sqrt{1+u^2}$. Nous voyons bien que la projection de β sur le plan Oxy est une fonction périodique de période 2π décrivant un cercle de rayon 1 ; la projection de $\bar{\beta}$ sur le plan Oxy présente aussi un aspect rotatoire, mais le facteur $(1+u^2)^{-1/2}$ fait en sorte qu'une spirale est obtenue. Par ailleurs, $u/\sqrt{1+u^2} : (-\infty, \infty) \rightarrow (-1, 1)$ est une fonction surjective strictement croissante. Bref, le vecteur $\bar{\beta}$ spirale autour de l'axe des z en se redressant. La figure 3 en fin de document (gracieuseté d'Yvan Saint-Aubin) montre clairement la surface M résultante, la courbe rouge montrant le redressement de $\bar{\beta}$.

b : Nous calculons (pour $v > 0$)

$$\mathbf{x}_u = (-v \sin u, v \cos u, v) \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_v = (\cos u, \sin u, u),$$

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 2v^2, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = uv \quad \text{et} \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = 1 + u^2,$$

$$\Rightarrow I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v^2 & uv \\ uv & 1 + u^2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -v \sin u & v \cos u & v \\ \cos u & \sin u & u \end{vmatrix} = v(u \cos u - \sin u, u \sin u + \cos u, -1),$$

$$\Rightarrow \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| = v\sqrt{2 + u^2} \Rightarrow \mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \frac{(u \cos u - \sin u, u \sin u + \cos u, -1)}{\sqrt{2 + u^2}};$$

$$\mathbf{x}_{uu} = (-v \cos u, -v \sin u, 0), \quad \mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu} = (-\sin u, \cos u, 1) \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_{vv} = (0, 0, 0),$$

$$l = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{n} = \frac{-uv}{\sqrt{2 + u^2}}, \quad m = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{et} \quad n = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

$$\Rightarrow II = \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2 + u^2}} \begin{pmatrix} -uv & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$I^{-1} = \frac{1}{\det I} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} = \frac{1}{v^2(2 + u^2)} \begin{pmatrix} 1 + u^2 & -uv \\ -uv & 2v^2 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow S = I^{-1}II = \frac{1}{v^2(2 + u^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} -(1 + u^2)uv & 0 \\ u^2v^2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{u}{v(2 + u^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} -(1 + u^2) & 0 \\ uv & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow K = \det S = 0.$$

c : Puisque les courbes $\{u = \text{constante}\}$ sont des droites, leur courbure est partout nulle : ce sont des courbes asymptotiques. Puisque $K = 0$, au moins une des deux courbures principales est nulle. Par la formule d'Euler, nous en déduisons qu'ici, une direction est asymptotique si et seulement s'il s'agit d'une direction principale de courbure nulle. Ainsi, les courbes $\{u = \text{constante}\}$ sont partout tangentes à des directions principales (de courbure nulle) et il s'agit donc de lignes de courbure. De manière alternative, nous voyons directement que "les vecteurs" $(0, 1)$ (qui correspondent dans les

repères $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ aux \mathbf{x}_v , qui sont tangents aux courbes $\{u = \text{constante}\}$) sont des vecteurs propres (de valeur propre 0) de la matrice S ci-dessus.

d : En chaque point, \mathbf{x}_v détermine une direction principale. Nous savons que l'autre doit lui être perpendiculaire : par Gram-Schmidt, c'est le cas pour

$$\mathbf{z} := \mathbf{x}_u - \frac{\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v}{\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v} \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_u - \frac{F}{G} \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_u - \frac{uv}{1+u^2} \mathbf{x}_v.$$

Le champ de vecteurs correspondant dans l'espace de paramètre est $(u, v) \mapsto \hat{u} - \frac{uv}{1+u^2} \hat{v}$. Les courbes intégrales de ce champs sont les solutions $t \mapsto (u(t), v(t))$ satisfaisant les équations différentielles :

$$\frac{du}{dt} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{uv}{1+u^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dv} = -\frac{1+u^2}{uv}.$$

En séparant les variables, nous obtenons l'équation différentielle suivante le long de chaque solution :

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{2} \frac{d(1+u^2)}{1+u^2} = \right) - u \frac{du}{1+u^2} = \frac{dv}{v} \\ \Rightarrow & -(\ln[1+u^2])_{u(t_0)}^{u(t_1)} = \int_{u(t_0)}^{u(t_1)} -2u \frac{du}{1+u^2} = \int_{v(t_0)}^{v(t_1)} \frac{2dv}{v} = (\ln[v^2])_{v(t_0)}^{v(t_1)} \\ \Rightarrow & \ln[v(t_1)^2(1+u(t_1)^2)] = \ln[v(t_0)^2(1+u(t_0)^2)] = \text{constante } \tilde{c} \\ \Rightarrow & |v(t_1)|\sqrt{1+u(t_1)^2} = e^{\tilde{c}/2} =: c. \end{aligned}$$

Ainsi, chaque courbe intégrale est un ensemble de la forme (avec c constant)

$$\{(u, v) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \mid v\sqrt{1+u^2} = c\}.$$

Le long d'une telle courbe, $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{x}\left(u, \frac{c}{\sqrt{1+u^2}}\right) = \frac{c}{\sqrt{1+u^2}} (\cos u, \sin u, u)$. La norme de ceci se calcule facilement, donnant $\|\mathbf{x}(u, v(c, u))\| = |c|$: les autres lignes de courbures de M se trouvent sur des sphères centrées à l'origine. En fait, nous nous rendons compte que les autres lignes de courbure sur M sont $\alpha_c(u) := \mathbf{x}(u, v(c, u)) = c\bar{\beta}(u)$, avec $c > 0$ (afin que $v > 0$).

Remarques : Les conclusions de cet exercice se généralisent de manière assez directe à n'importe quelle surface réglée de la forme $\mathbf{x}(u, v) = v\beta(u)$ avec $v > 0$. En effet, posons $\nu(u) := \|\beta(u)\|$ et $\bar{\beta}(u) := \beta(u)/\nu(u)$. Supposons que $\bar{\beta}$ est bien défini pour tout u (c'est-à-dire, que $\beta(u) \neq 0$ partout) et que $\bar{\beta}$ et ν soient de classe \mathcal{C}^2 .

En effectuant des calculs similaires à la partie **b**, nous obtenons

$$\mathbf{x}_u = v(\nu' \bar{\beta} + \nu \bar{\beta}'), \quad \mathbf{x}_v = \nu \bar{\beta} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} * & v \nu' \nu \\ v \nu' \nu & \nu^2 \end{pmatrix}$$

(Ici et pour ce qui suit, $*$ désigne une quantité (pas toujours la même !) dont la connaissance précise ne nous intéresse pas. Nous avons utilisé aussi $\bar{\beta} \cdot \bar{\beta} = 1$ et (donc) $\bar{\beta}' \cdot \bar{\beta} = 0$.)

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = v \nu^2 (\bar{\beta}' \times \bar{\beta}) \Rightarrow \mathbf{n} = * (\bar{\beta}' \times \bar{\beta})$$

$$\mathbf{x}_{uu} = *, \quad \mathbf{x}_{uv} = \nu' \bar{\beta} + \nu \bar{\beta}', \quad \mathbf{x}_{vv} = 0 \Rightarrow \mathbf{II} = \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} = * \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Dans le calcul de m , nous utilisons le fait que $\bar{\beta}$ et $\bar{\beta}'$ sont perpendiculaires à $\bar{\beta}' \times \bar{\beta}$.) Il est résulte que

$$S = \mathbf{I}^{-1} \mathbf{II} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow K = \det S = 0.$$

C'est à comparer à l'exercice 7 considéré plus loin, qui nous apprend que pour une surface réglée générale (où α n'est pas forcément nulle), $K \leq 0$; quand α est nulle, l'égalité $K = 0$ tient !

Comme à la partie **c**, il s'avère que les droites $v \mapsto v\beta(u_0)$ sont des lignes asymptotiques. En particulier, les vecteurs tangents $\mathbf{x}_v = \nu \bar{\beta}$, et donc les vecteurs unitaires $\bar{\beta}$, sont des directions asymptotiques. Puisque $K = 0$, il s'agit aussi d'une direction principale.

Comme à la partie **d**, nous obtenons "l'autre" direction principale via le procédé de Gram-Schmidt :

$$\mathbf{z} := \mathbf{x}_u - (F/G)\mathbf{x}_v = v(\nu' \bar{\beta} + \nu \bar{\beta}') - v \nu' \bar{\beta} = v \nu \bar{\beta}'$$

L'équation différentielle $\alpha'(u) = \mathbf{z}|_{\alpha(u)}$ se résout comme ci-dessus. Alternativement, nous pouvons voir qu'il s'agit des courbes $c\bar{\beta}$ où $c > 0$ est une constante, soit encore l'ensemble des points de la surface tels que $\{v \nu(u) = c\}$.

[**Saint-Aubin**] Soit M une surface régulière et $\mathbf{x} : U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{y} : S \rightarrow M$ deux paramétrages en $P \in M$, c'est-à-dire tels que $P = \mathbf{x}(u_0, v_0) = \mathbf{y}(s_0, t_0)$ avec $(u_0, v_0) \in U$ et $(s_0, t_0) \in S$. L'exercice #14 de la section 2.1 de Shifrin nous a enseigné que $T_P^{\mathbf{x}}M = T_P^{\mathbf{y}}M$. (Nous introduisons ici les indices supérieures \mathbf{x} et \mathbf{y} pour souligner dans quel paramétrage le calcul a été fait. Nous ferons de même par la suite pour toutes les quantités.) Puisque U et S sont des ouverts contenant une pré-image de P , les ensembles $\mathcal{U} = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(S))$ et $\mathcal{S} = \mathbf{y}^{-1}(\mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(S))$ sont des ouverts de U et de S respectivement. Si \mathbf{x} et \mathbf{y} sont lisses, alors les deux fonctions

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{U}$$

sont lisses. (Nous ne l'avons pas montré, mais nous le tiendrons pour acquis.)

a : Soient $\mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x} = (s(u, v), t(u, v))$ où $(u, v) \in \mathcal{U}$ et Q la matrice jacobienne:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Écrire le changement de bases entre les deux bases induites $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ et $\{\mathbf{y}_s, \mathbf{y}_t\}$ du plan tangent à M en P à l'aide de la matrice Q . En quel point doit être évalué Q ? Est-ce que cette matrice est toujours inversible? Est-ce normal qu'elle soit 2×2 ?

b : Soient $I_P^{\mathbf{x}}$ et $I_P^{\mathbf{y}}$ les matrices représentant la première forme fondamentale dans les deux bases. Dire comment passer d'une matrice à l'autre.

c : Même question pour les matrices $II_P^{\mathbf{x}}$ et $II_P^{\mathbf{y}}$ représentant la seconde forme fondamentale.

d : Un invariant géométrique d'une surface M est une quantité qui ne dépend pas du paramétrage choisi pour la calculer. Quelles quantités parmi les suivantes sont des invariants géométriques : les courbures principales, la courbure moyenne, la courbure gaussienne, les directions asymptotiques?

RÉPONSE :

a : Remarquons que \mathbf{x} transforme le vecteur \hat{u} (respectivement \hat{v}) en \mathbf{x}_u (resp. \mathbf{x}_v). Ainsi, l'application linéaire $D\mathbf{x} : T_*U \rightarrow T_*M$ est représentée dans les bases $\{\hat{u}, \hat{v}\}$ et $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ par la matrice identité. De façon analogue, \mathbf{y} transforme le vecteur \hat{s} (resp. \hat{t}) en \mathbf{y}_s (resp. \mathbf{y}_t); l'application linéaire $D\mathbf{y} : T_*S \rightarrow T_*M$ est représentée dans les bases $\{\hat{s}, \hat{t}\}$ et $\{\mathbf{y}_s, \mathbf{y}_t\}$ par la matrice identité.

Par ailleurs, il faut bien comprendre que la matrice Q ci-dessus représente l'application linéaire $D(\mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x}) : T_*\mathcal{U} \rightarrow T_*\mathcal{S}$ dans la base $\{\hat{u}, \hat{v}\}$ de $T_*\mathcal{U}$ et dans la base $\{\hat{s}, \hat{t}\}$ de $T_*\mathcal{S}$.

L'application identité $M \rightarrow M$ induit une application linéaire identité $T_*M \rightarrow T_*M$ qui s'écrit aussi comme la composition des applications linéaires

$$(D\mathbf{y}) \circ (D(\mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x})) \circ (D\mathbf{x}^{-1}) : T_*M \xrightarrow{D\mathbf{y}} T_*\mathcal{U} \xrightarrow{D(\mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x})} T_*\mathcal{S} \xrightarrow{D\mathbf{x}^{-1}} T_*M$$

Cette dernière décomposition est ainsi représentée dans les bases mentionnées précédemment par le produit matriciel $Id \cdot Q \cdot Id^{-1} = Q$.

Or, il s'agit de la façon dont se transforment les vecteurs, c'est-à-dire les composantes ; le changement de base, lui, se fait en sens inverse. Plus explicitement, tout vecteur $\mathbf{v} \in T_P M$ peut être écrit comme $a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v$ et comme $c\mathbf{y}_s + d\mathbf{y}_t$, soit en notation matricielle $[\mathbf{v}]_{\mathbf{x}} = (a \ b)^T$ et $[\mathbf{v}]_{\mathbf{y}} = (c \ d)^T$. Notre calcul ci-dessus indiquent que

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = (\mathbf{x}_u \ \mathbf{x}_v) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (\mathbf{y}_s \ \mathbf{y}_t) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = (\mathbf{y}_s \ \mathbf{y}_t) Q \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Ainsi, partout sur $\mathbf{x}(\mathcal{U}) = \mathbf{y}(\mathcal{S}) \subset M$, le changement de système de coordonnées induit le changement de bases

$$\begin{aligned} (\mathbf{y}_s \ \mathbf{y}_t) &= (\mathbf{x}_u \ \mathbf{x}_v) Q^{-1} = (\mathbf{x}_u \ \mathbf{x}_v) \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} = (\mathbf{x}_u \ \mathbf{x}_v) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} \mathbf{x}_u + \frac{\partial v}{\partial s} \mathbf{x}_v & \frac{\partial u}{\partial t} \mathbf{x}_u + \frac{\partial v}{\partial t} \mathbf{x}_v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il s'agit bien sûr de la dérivation en chaînes. Cette relation est évaluée de la façon suivante : si $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ est une base de $T_P M$ et si $P = \mathbf{x}(u_0, v_0)$, alors $(\mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x})(u_0, v_0)$ vaut disons (s_0, t_0) et donc $P = \mathbf{y}(s_0, t_0)$, d'où

$$(\mathbf{y}_s(s_0, t_0) \ \mathbf{y}_t(s_0, t_0)) = (\mathbf{x}_u(u_0, v_0) \ \mathbf{x}_v(u_0, v_0)) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s}(s_0, t_0) & \frac{\partial u}{\partial t}(s_0, t_0) \\ \frac{\partial v}{\partial s}(s_0, t_0) & \frac{\partial v}{\partial t}(s_0, t_0) \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse sur les paramétrages, nous pouvons aussi considérer $\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}$ et le théorème de la fonction inverse nous apprend que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial s}(s_0, t_0) & \frac{\partial u}{\partial t}(s_0, t_0) \\ \frac{\partial v}{\partial s}(s_0, t_0) & \frac{\partial v}{\partial t}(s_0, t_0) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial s}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial t}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial t}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix},$$

prouvant l'inversibilité de la matrice de passage. Le fait que cette matrice soit 2×2 traduit simplement le fait que M est une surface, c'est-à-dire qu'elle est obtenue par une sorte de déformation du plan bidimensionnel.

b : Rappelons que si \mathbf{a} et \mathbf{b} sont deux vecteurs de \mathbb{R}^3 , exprimés dans une base orthonormée $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ comme $(a_1 \ a_2 \ a_3)^T$ et $(b_1 \ b_2 \ b_3)^T$, leur produit scalaire s'exprime alors

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Notons que les "vecteurs" $(\mathbf{x}_u \ \mathbf{x}_v)$ et $(\mathbf{y}_s \ \mathbf{y}_t)$ rencontrés plus haut sont les matrices jacobiniennes

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{x}_u)_1 & (\mathbf{x}_v)_1 \\ (\mathbf{x}_u)_2 & (\mathbf{x}_v)_2 \\ (\mathbf{x}_u)_3 & (\mathbf{x}_v)_3 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} (\mathbf{y}_s)_1 & (\mathbf{y}_t)_1 \\ (\mathbf{y}_s)_2 & (\mathbf{y}_t)_2 \\ (\mathbf{y}_s)_3 & (\mathbf{y}_t)_3 \end{pmatrix}$$

des applications $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{y} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, respectivement. Ainsi, puisque la première forme fondamentale de M est la "restriction" du produit scalaire de \mathbb{R}^3 à la surface, nous obtenons dans les paramétrages ci-dessus :

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_P(a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v, c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v) &= (a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v, c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v)_P = \left[(\mathbf{x}_u \ \mathbf{x}_v)_P \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right]^T \left[(\mathbf{x}_u \ \mathbf{x}_v)_P \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right] \\ &= (a \ b) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \end{pmatrix}_P \cdot (\mathbf{x}_u \ \mathbf{x}_v)_P \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = (a \ b) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \end{pmatrix}_P \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\ &= (a \ b) \left[\mathbb{I}_P^{\mathbf{x}} \right] \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \\ \mathbb{I}_P(e\mathbf{y}_s + f\mathbf{y}_t, g\mathbf{y}_s + h\mathbf{y}_t) &= (e \ f) \begin{pmatrix} \mathbf{y}_s \cdot \mathbf{y}_s & \mathbf{y}_s \cdot \mathbf{y}_t \\ \mathbf{y}_t \cdot \mathbf{y}_s & \mathbf{y}_t \cdot \mathbf{y}_t \end{pmatrix}_P \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} = (e \ f) \left[\mathbb{I}_P^{\mathbf{y}} \right] \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ici, l'indice P signifie que nous évaluons les quantités au point (u_0, v_0) (resp. (s_0, t_0)).

Sachant les formules de changement de base de la partie précédente, nous déduisons des derniers calculs que

$$\begin{aligned} [I_P^y] &= \begin{pmatrix} \mathbf{y}_s \\ \mathbf{y}_t \end{pmatrix}_P \cdot (\mathbf{y}_s \ \mathbf{y}_t)_P = \left[(\mathbf{y}_s \ \mathbf{y}_t)_P \right]^T \cdot (\mathbf{y}_s \ \mathbf{y}_t)_P \\ &= \left[(\mathbf{x}_u \ \mathbf{x}_v)_P Q^{-1} \right]^T \cdot \left[(\mathbf{x}_u \ \mathbf{x}_v)_P Q^{-1} \right] = (Q^{-1})^T \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \end{pmatrix}_P \cdot (\mathbf{x}_u \ \mathbf{x}_v)_P Q^{-1} \\ &= (Q^{-1})^T [I_P^x] Q^{-1}. \end{aligned}$$

Cela montre comment “la première forme fondamentale” se transforme, ou plutôt comment passer d’une matrice représentante à une autre. Notez que c’est la transposée de Q qui apparaît et non pas l’inverse comme vous avez vu en algèbre linéaire ; la raison de ceci devrait s’éclaircir en **c**.

c : L’opérateur de forme $S_P : T_P M \rightarrow T_P M : \mathbf{v} \mapsto (D_{\mathbf{v}} \mathbf{n})(P)$ est une application linéaire entre espaces vectoriels. Ainsi, si $[S_P^x]$ est la matrice représentant cette transformation dans la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ utilisée tant dans le “ $T_P M$ de départ” que dans le “ $T_P M$ d’arrivée”, et si $[S_P^y]$ est définie de façon analogue, alors les considérations de changement de bases étudiées en algèbre linéaire nous apprennent que

$$[S_P^y] = Q[S_P^x]Q^{-1},$$

c’est-à-dire que :

- (1) dans le “ $T_P M$ de départ”, on passe de $\{\mathbf{y}_s, \mathbf{y}_t\}$ à $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$,
- (2) via $[S_P^x]$, on passe du “ $T_P M$ de départ” au “ $T_P M$ d’arrivée”,
- (3) puis dans le “ $T_P M$ d’arrivée”, on passe de $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ à $\{\mathbf{y}_s, \mathbf{y}_t\}$.

Il y a cependant une subtilité importante ici : le vecteur normal \mathbf{n} dépend du paramétrage. Si ce n’était pas le cas, alors $[S]$ changerait bel et bien selon la relation ci-dessus. Puisque $\mathbf{n}_P^x = \pm \mathbf{n}_P^y$, le signe précis n’étant rien d’autre que $\mathbf{n}_P^x \cdot \mathbf{n}_P^y$, nous avons

$$[S_P^y] = (\mathbf{n}_P^x \cdot \mathbf{n}_P^y) Q[S_P^x]Q^{-1}.$$

Le fait que la première forme fondamentale se transforme différemment, avec la transposée plutôt que l’inverse, dénote le fait que la première forme

fondamentale n'a rien d'une application linéaire d'un espace vectoriel vers lui-même, mais qu'il s'agit plutôt d'une forme bilinéaire à valeurs réelles. Cela montre aussi qu'une matrice est avant tout une notation pouvant servir à représenter des choses foncièrement différentes.

Maintenant, $\text{II}_P(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \text{I}_P(\mathbf{u}, S_P(\mathbf{v}))$ quels que soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_P M$, d'où $[\text{II}_P^{\mathbf{x}}] = [\text{I}_P^{\mathbf{x}}][S_P^{\mathbf{x}}]$ et $[\text{II}_P^{\mathbf{y}}] = [\text{I}_P^{\mathbf{y}}][S_P^{\mathbf{y}}]$ (il s'agit essentiellement des relations que nous avons utilisées dans les problèmes précédents pour calculer S à partir de I et de II). Ainsi,

$$\begin{aligned} [\text{II}_P^{\mathbf{y}}] &= [\text{I}_P^{\mathbf{y}}][S_P^{\mathbf{y}}] = (\mathbf{n}_P^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}_P^{\mathbf{y}}) (Q^{-1})^T [\text{I}_P^{\mathbf{x}}] Q^{-1} Q [S_P^{\mathbf{x}}] Q^{-1} \\ &= (\mathbf{n}_P^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}_P^{\mathbf{y}}) (Q^{-1})^T [\text{I}_P^{\mathbf{x}}] [S_P^{\mathbf{x}}] Q^{-1} = (\mathbf{n}_P^{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}_P^{\mathbf{y}}) (Q^{-1})^T [\text{II}_P^{\mathbf{x}}] Q^{-1}. \end{aligned}$$

Nous voyons que la seconde forme fondamentale se transforme (presque) comme une forme bilinéaire (à valeurs réelles). Bref, la terminologie de “forme” pour désigner I et II vient du fait qu'il s'agit des formes bilinéaires (je ne sais pas d'où provient cette dernière terminologie de “forme”...).

d : Dans un sens, la quantité I est une quantité géométrique, un “invariant” géométrique ; nous avons vu qu'elle changeait sous les changements de paramétrages, mais elle se transforme “bien” au goût des géomètres (par rapport à d'autres quantités que nous pourrions considérer, comme II et S ...). Cela montre qu'en général, la notion d'invariant géométrique peut être un peu subtile.

Ici cependant, nous nous intéressons surtout à des quantités scalaires ; dans ce cas, être un “invariant géométrique” signifie bel et bien “ne pas changer sous les paramétrages”.

courbures principales : Il s'agit des valeurs propres de S . D'un point de vue abstrait, en voyant S comme application linéaire, il est plutôt aisé de voir que les valeurs propres sont (presque) indépendantes du paramétrage, une subtilité venant du fait que \mathbf{n} et donc S dépend du paramétrage. En utilisant des représentations matricielles de S , la relation $[S_P^{\mathbf{y}}] = \pm Q [S_P^{\mathbf{x}}] Q^{-1}$ nous apprend que les polynômes caractéristiques de $[S_P^{\mathbf{y}}]$ et de $[S_P^{\mathbf{x}}]$ sont presque identiques :

$$\begin{aligned}
P_{[S_P^y]}(\lambda) &:= \det([S_P^y] - \lambda \text{Id}) = \det(\pm Q[S_P^x]Q^{-1} - \lambda \text{Id}) \\
&= \det(\pm Q[S_P^x]Q^{-1} - \pm(\pm\lambda)Q\text{Id}Q^{-1}) \\
&= \det\left(\pm Q\left[[S_P^x] - (\pm\lambda)\text{Id}\right]Q^{-1}\right) = \det\left(\pm Q^{-1}Q\left[[S_P^x] - (\pm\lambda)\text{Id}\right]\right) \\
&= (\pm)^2 \det([S_P^x] - (\pm\lambda)\text{Id}) =: P_{[S_P^x]}(\pm\lambda).
\end{aligned}$$

Les racines des “deux” polynômes étant donc les mêmes, au signe près, les valeurs propres sont identiques au signe près. Il s’agit ainsi d’un pseudo-invariant géométrique. Cependant, en restreignant les paramétrages \mathbf{x} permis, de sorte que la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{n}^x\}$ de \mathbb{R}^3 soit reliée à la base canonique $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ via une transformation inversible de déterminant positif (soit un élément de $Gl^+(\mathbb{R}^3)$), alors les courbures principales deviennent de “vrais” invariants.

courbure gaussienne : La courbure gaussienne est le déterminant de S , soit encore le produit des valeurs propres. Ainsi, K ne dépend pas du tout du paramétrage, puisque $k_1 k_2 = (\pm k_1)(\pm k_2)$ quel que soit le signe \pm . Ainsi, la courbure gaussienne est un véritable invariant géométrique. Cela suggère une importance particulière pour cette quantité.

courbure moyenne : La courbure moyenne est la moitié de la trace de S . Ainsi, elle est sensible au signe \pm ; il s’agit d’un pseudo-invariant géométrique, mais d’une quantité $Gl^+(\mathbb{R}^3)$ -invariante.

directions principales : Il s’agit des sous-espaces propres de S dans \mathbb{R}^3 . Ce sont des objets clairement indépendants du paramétrage. Cependant, puisqu’une base de $T_P M$ de la forme $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ dépend du paramétrage, la relation de ces directions principales avec une telle base dépend du paramétrage, mais il s’agit pour un géomètre d’une “bonne” dépendance.

[Chapitre 2, p.53, no 7] Montrer qu'une surface réglée a une courbure gaussienne $K \leq 0$ partout.

RÉPONSE :

Ceci découle directement des résultats présentés à la page 48 dans les notes de Shifrin. En fait, puisque la surface est supposée réglée ici, par chaque point P passe une droite (de \mathbb{R}^3) incluse dans la surface. En raison de l'exemple 3, cette droite est une courbe asymptotique de la surface : d'un point de vue infinitésimal, il existe donc une direction asymptotique en tout point d'une surface réglée. En raison du corollaire 2.4, plus particulière de l'implication

Il y a une direction asymptotique en $P \implies K = k_1 k_2 \leq 0$,
nous pouvons conclure.

[Chapitre 2, p.54, no 13] Prouver ou donner un contre-exemple : si M est une surface de courbure gaussienne $K > 0$ partout, alors la courbure de toute courbe $C \subset M$ est strictement positive (souvenons-nous que, par définition, $\kappa \geq 0$).

RÉPONSE :

Intuitivement, il apparaît tout à fait plausible que cette affirmation soit vraie. Pour le démontrer, il suffit de montrer que pour un point $P \in M$ (fixé, mais arbitraire²) et pour une courbe $C \subset M$ (fixée, mais arbitraire) tels que $P \in C$, l'hypothèse $K(P) > 0$ implique que $\kappa_C(P) > 0$. L'idée maîtresse est de montrer que C est au moins autant courbée que certaines courbes particulières sur M .

Voici trois approches différentes, intimement liées, mais plus ou moins détaillées ou usant plus ou moins de résultats récemment vus en classe.

Approche 1: La formule de Meusnier est $\kappa_C \cos \phi = \kappa_n$ (Proposition 2.5, p.51), où ϕ est l'angle entre \mathbf{N}_α et \mathbf{n} au point P . Dans le cas présent, $\phi \neq \pi/2$; autrement nous aurions $\kappa_n = 0$, dans quel cas le vecteur tangent serait une direction asymptotique, ce qui nécessite $K \leq 0$, en contradiction avec l'hypothèse $K > 0$. La courbure K étant un invariant géométrique, nous pouvons changer l'orientation de la surface au besoin sans modifier K . Ainsi, supposons que $\phi \in [0, \pi/2)$, dans quel cas $\cos \phi > 0$. Puisque $\kappa_C \geq 0$ par définition, la formule de Meusnier force $\kappa_n \geq 0$. Ainsi,

$$\kappa_C = \kappa_n \sec \phi \geq \kappa_n \geq 0.$$

Or, de manière totalement générale, κ_n vaut tout au moins la plus petite des courbures principales, disons k_2 . Puisque $K = k_1 k_2 > 0$, les deux courbures ont même signe et sont non nulles. Par ce qui précède, $\kappa_C \geq \kappa_n \geq k_2 > 0$. Cela termine la preuve.

²Cette formulation rappelle un peu le “environ précisément” des chimistes !

Approche 2 : Soit \mathbf{n} un vecteur normal unité à M en P ; pour le déterminer précisément, supposons que les “tranches normales” de M en P (voir Shifrin, p.44-45) courbent toutes dans la direction de \mathbf{n} (le fait que les tranches normales courbent toutes dans la même direction (normale) est une conséquence de $K > 0$). Prenons n’importe quel paramétrage régulier \mathbf{x} près de P tel que $(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) / \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|$ vaille \mathbf{n} en P (plutôt que $-\mathbf{n}$).

Par rapport à ce paramétrage, les courbures principales en P sont tous deux positives (le fait qu’elles aient même signe est une conséquence du fait que leur produit K est > 0). Notons k la plus petite des ces deux courbures. Par la formule d’Euler (p.47), il en résulte que toutes les tranches normales en P sont de courbure positive en P , valant tout au moins k .

Considérons le point $Q \in \mathbb{R}^3$ donné par $P + (\frac{1}{k}) \mathbf{n}$ ainsi que la boule fermée B centrée en Q de rayon $1/k$. Par construction, P est contenu dans la frontière de B . En considérant les centres des cercles osculateurs de toutes les tranches normales, nous nous rendons compte qu’ils sont tous situés sur le segment droit PQ . Il en résulte que toutes les tranches normales en P sont “localement” contenue dans B et donc que B contient un voisinage dans M de P .

Dès lors, toute courbe sur M passant par P est localement contenue dans B . Par l’exercice 7 de la page 18 (résolu dans le deuxième TP), nous en tirons que ces courbes sont de courbure tout au moins $\kappa \geq k > 0$.

Approche 3 : Nous supposons qu'un choix de paramétrage \mathbf{x} d'un voisinage de P dans M a été fait, mais contrairement à la première approche, nous ne supposons rien de plus sur ce paramétrage. Considérons aussi un paramétrage longueur d'arc α de la courbe C . Quel que soit le "temps" s , le vecteur tangent $\mathbf{T}(s) = \alpha'(s)$ appartient à $T_{\alpha(s)}M$. Il est en particulier perpendiculaire au vecteur normal (de M) $\mathbf{n}(\alpha(s)) =: \mathbf{n}(s)$. Définissons un champ normal unité \mathbf{b} le long de C via $\mathbf{b}(s) := \mathbf{T}(s) \times \mathbf{n}(s)$; ce champ s'avère partout tangent à M . Ainsi, le long de C , nous avons des repères orthonormés $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ qui sont, pour ainsi dire, adaptés à la fois à la courbe et à la surface.

Nous savons que $\mathbf{T}'(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s)$; ce vecteur doit appartenir au plan $\Pi(s) := \mathbb{R}\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$. Nous pouvons alors écrire (par orthonormalité de $\{\mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$)

$$\mathbf{T}'(s) = \underbrace{(\mathbf{T}'(s) \cdot \mathbf{n}(s)) \mathbf{n}(s)}_{\in (T_{\alpha(s)}M)^\perp} + \underbrace{(\mathbf{T}'(s) \cdot \mathbf{b}(s)) \mathbf{b}(s)}_{\in T_{\alpha(s)}M}$$

Ainsi, $\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\| = \sqrt{(\mathbf{T}'(s) \cdot \mathbf{n}(s))^2 + (\mathbf{T}'(s) \cdot \mathbf{b}(s))^2} \geq |\mathbf{T}'(s) \cdot \mathbf{n}(s)|$. L'inégalité tient du fait que nous "oublions" la courbure de C "s'effectuant le long de la surface". Il reste à prouver que $|\mathbf{T}'(s) \cdot \mathbf{n}(s)| > 0$ dans notre contexte.

Notons que $0 = (0)' = (\mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{n}(s))' = \mathbf{T}'(s) \cdot \mathbf{n}(s) + \mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{n}'(s)$, d'où nous tirons $\kappa(s) \geq |\mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{n}'(s)|$. Or, $\mathbf{n}'(s) = (D_{\mathbf{T}(s)}\mathbf{n})(s)$, de sorte que

$$\begin{aligned} \kappa(s) &\geq |\mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{n}'(s)| = |\mathbf{T}(s) \cdot (D_{\mathbf{T}(s)}\mathbf{n})(s)| = |-\mathbf{T}(s) \cdot (D_{\mathbf{T}(s)}\mathbf{n})(s)| \\ &= |\mathbf{T}(s) \cdot S_{\alpha(s)}(\mathbf{T}(s))| = |\Pi_{\alpha(s)}(\mathbf{T}(s), \mathbf{T}(s))| \end{aligned}$$

La formule d'Euler nous dit que $\Pi_{\alpha(s)}(\mathbf{T}(s), \mathbf{T}(s)) = k_1(s)(\cos \theta(s))^2 + k_2(s)(\sin \theta(s))^2$ où $k_1(s), k_2(s)$ sont les courbures principales en $\alpha(s)$ et $\theta(s)$ est ici l'angle entre $\mathbf{T}(s)$ et la première direction principale en $\alpha(s)$.

Par hypothèse, $K(s) = k_1(s)k_2(s) > 0$, donc $k_1(s)$ et $k_2(s)$ ont même signe et sont non nuls, donc

$$\kappa(s) \geq |k_1(s)|(\cos \theta(s))^2 + |k_2(s)|(\sin \theta(s))^2 \geq \min\{|k_1(s)|, |k_2(s)|\} > 0.$$

[Chapitre 2, p.64, no 2] Calculer les symboles de Christoffel des surfaces paramétrées suivantes. Vérifier pour chacune d'elles la validité des équations de Codazzi et de la première équation de Gauss.

a) : Le plan en coordonnées polaires : $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 0)$.

b) : L'hélicoïde : $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$.

RÉPONSE :

Rappelons les formules importantes. Les symboles de Christoffel sont des quantités associées à un paramétrage (ce ne sont pas des quantités purement géométriques) que l'on calcule à partir de la première forme fondamentale $[I]_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ à l'aide, par exemple, du produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u & \Gamma_{uv}^u & \Gamma_{vv}^u \\ \Gamma_{uu}^v & \Gamma_{uv}^v & \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u & \frac{1}{2}E_v & F_v - \frac{1}{2}G_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v \end{pmatrix}$$

Rappelons que les symboles de Christoffel sont symétriques sous l'échange des deux indices du bas, c'est-à-dire que $\Gamma_{uv}^u = \Gamma_{vu}^u$ et $\Gamma_{uv}^v = \Gamma_{vu}^v$. Les équations de Codazzi lient les symboles de Christoffel aux coefficients (et leurs dérivées) de la seconde forme fondamentale $[II]_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}$ comme suit :

$$\begin{aligned} l_v - m_u &= l\Gamma_{uv}^u + m(\Gamma_{uv}^v - \Gamma_{uu}^u) - n\Gamma_{uu}^v \\ m_v - n_u &= l\Gamma_{vv}^u + m(\Gamma_{vv}^v - \Gamma_{uv}^u) - n\Gamma_{uv}^v. \end{aligned}$$

Chacune des équations de Gauss exprime la courbure gaussienne comme fonction des symboles de Christoffel et d'un coefficient de la première forme fondamentale. En particulier, la première équation est :

$$EK = (\Gamma_{uu}^v)_v - (\Gamma_{uv}^v)_u + \Gamma_{uu}^u\Gamma_{uv}^v + \Gamma_{uu}^v\Gamma_{vv}^v - \Gamma_{uv}^u\Gamma_{uu}^v - \Gamma_{uv}^v\Gamma_{uv}^v.$$

$$\mathbf{a}) : \mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 0)$$

Voici le calcul de toutes les quantités usuelles, ainsi que de celles d'intérêt ici lorsque nous le pouvons enfin :

$$\mathbf{x}_u = (\cos v, \sin v, 0), \quad \mathbf{x}_v = (-u \sin v, u \cos v, 0)$$

$$[\mathbf{I}]_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{I}]_{\mathbf{x}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/u^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_u & \frac{1}{2} E_v & F_v - \frac{1}{2} G_u \\ F_u - \frac{1}{2} E_v & \frac{1}{2} G_u & \frac{1}{2} G_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -u \\ 0 & u & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u & \Gamma_{uv}^u & \Gamma_{vv}^u \\ \Gamma_{uu}^v & \Gamma_{uv}^v & \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -u \\ 0 & u & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -u \\ 0 & 1/u & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (0, 0, u) \Rightarrow \mathbf{n} = (0, 0, 1)$$

$$\mathbf{x}_{uu} = (0, 0, 0), \quad \mathbf{x}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0), \quad \mathbf{x}_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0)$$

$$[\mathbf{II}]_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow [S]_{\mathbf{x}} = [\mathbf{I}]_{\mathbf{x}}^{-1} [\mathbf{II}]_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (le plan ne courbe pas !)}$$

$$K = \det[S]_{\mathbf{x}} = 0.$$

Nous vérifions les équations de Codazzi :

$$l_v - m_u = 0 - 0 = 0$$

$$= 0.0 + 0(u^{-1} - 0) - 0.0 = l\Gamma_{uv}^u + m(\Gamma_{uv}^v - \Gamma_{uu}^u) - n\Gamma_{uu}^v$$

$$m_v - n_u = 0 - 0 = 0$$

$$= 0.(-u) + 0(0 - 0) - 0.u^{-1} = l\Gamma_{vv}^u + m(\Gamma_{vv}^v - \Gamma_{uv}^u) - n\Gamma_{uv}^v$$

Nous vérifions la première équation de Gauss :

$$EK = 1.0 = 0 = u^{-2} - u^{-2}$$

$$= (0)_v - (u^{-1})_u + 0.u^{-1} + 0.0 - 0.0 - u^{-1}u^{-1}$$

$$= (\Gamma_{uu}^v)_v - (\Gamma_{uv}^v)_u + \Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^v + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^v - \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^v - \Gamma_{uv}^v \Gamma_{uv}^v.$$

$$\mathbf{b) : } \mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$$

$$\mathbf{x}_u = (\cos v, \sin v, 0), \quad \mathbf{x}_v = (-u \sin v, u \cos v, 1)$$

$$\begin{aligned} [\mathbb{I}]_{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+u^2 \end{pmatrix}, \quad [\mathbb{I}]_{\mathbf{x}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1+u^2)^{-1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u & \frac{1}{2}E_v & F_v - \frac{1}{2}G_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -u \\ 0 & u & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u & \Gamma_{uv}^u & \Gamma_{vv}^u \\ \Gamma_{uu}^v & \Gamma_{uv}^v & \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1+u^2)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -u \\ 0 & u & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -u \\ 0 & u/(1+u^2) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (\sin v, -\cos v, u) \Rightarrow \mathbf{n} = \frac{(\sin v, -\cos v, u)}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\mathbf{x}_{uu} = (0, 0, 0), \quad \mathbf{x}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0), \quad \mathbf{x}_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0)$$

$$\begin{aligned} [\mathbb{II}]_{\mathbf{x}} &= \frac{-1}{\sqrt{1+u^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow [S]_{\mathbf{x}} &= [\mathbb{I}]_{\mathbf{x}}^{-1} [\mathbb{II}]_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -(1+u^2)^{-1/2} \\ -(1+u^2)^{-3/2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$K = \det[S]_{\mathbf{x}} = -\frac{1}{(1+u^2)^2}.$$

Nous vérifions les équations de Codazzi :

$$\begin{aligned} l_v - m_u &= 0 - [-(1+u^2)^{-1/2}]_u = -u(1+u^2)^{-3/2} \\ &= 0.0 + [-(1+u^2)^{-1/2}](u/(1+u^2) - 0) - 0.0 = l\Gamma_{uv}^u + m(\Gamma_{uv}^v - \Gamma_{uu}^u) - n\Gamma_{uu}^v \\ m_v - n_u &= 0 - 0 = 0 \\ &= 0.(-u) + [-(1+u^2)^{-1/2}](0 - 0) - 0.u/(1+u^2) = l\Gamma_{vv}^u + m(\Gamma_{vv}^v - \Gamma_{uv}^u) - n\Gamma_{uv}^v \end{aligned}$$

Nous vérifions la première équation de Gauss :

$$\begin{aligned} EK &= 1.[-(1+u^2)^{-2}] = -\frac{1}{(1+u^2)^2} = -\left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{2u^2}{(1+u^2)^2}\right) - \frac{u^2}{(1+u^2)^2} \\ &= (0)_v - (u/(1+u^2))_u + 0.u/(1+u^2) + 0.0 - 0.0 - u(1+u^2)^{-1}u(1+u^2)^{-1} \\ &= (\Gamma_{uu}^v)_v - (\Gamma_{uv}^v)_u + \Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^v + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^v - \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^v - \Gamma_{uv}^v \Gamma_{uv}^v. \end{aligned}$$

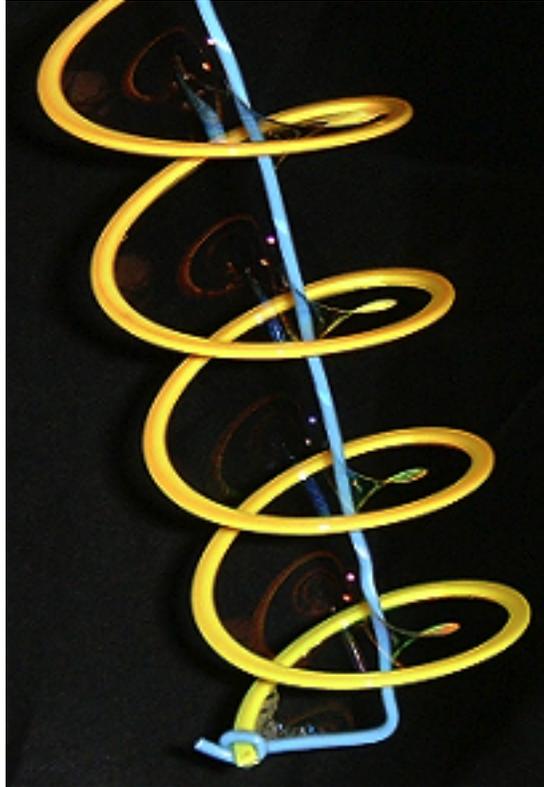


FIGURE 1

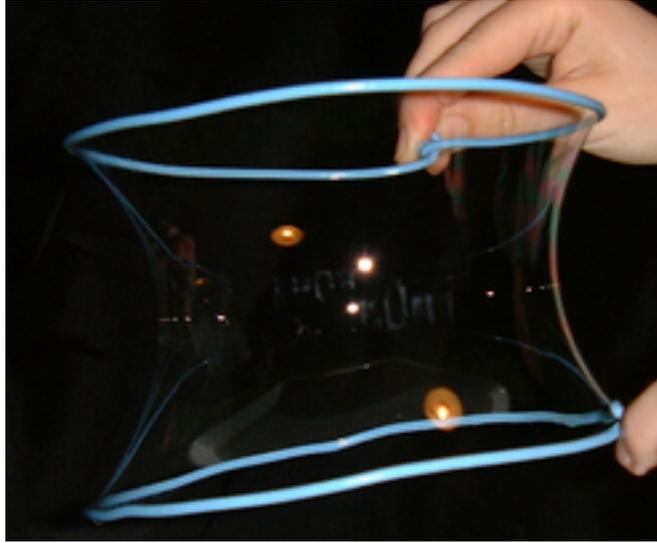


FIGURE 2

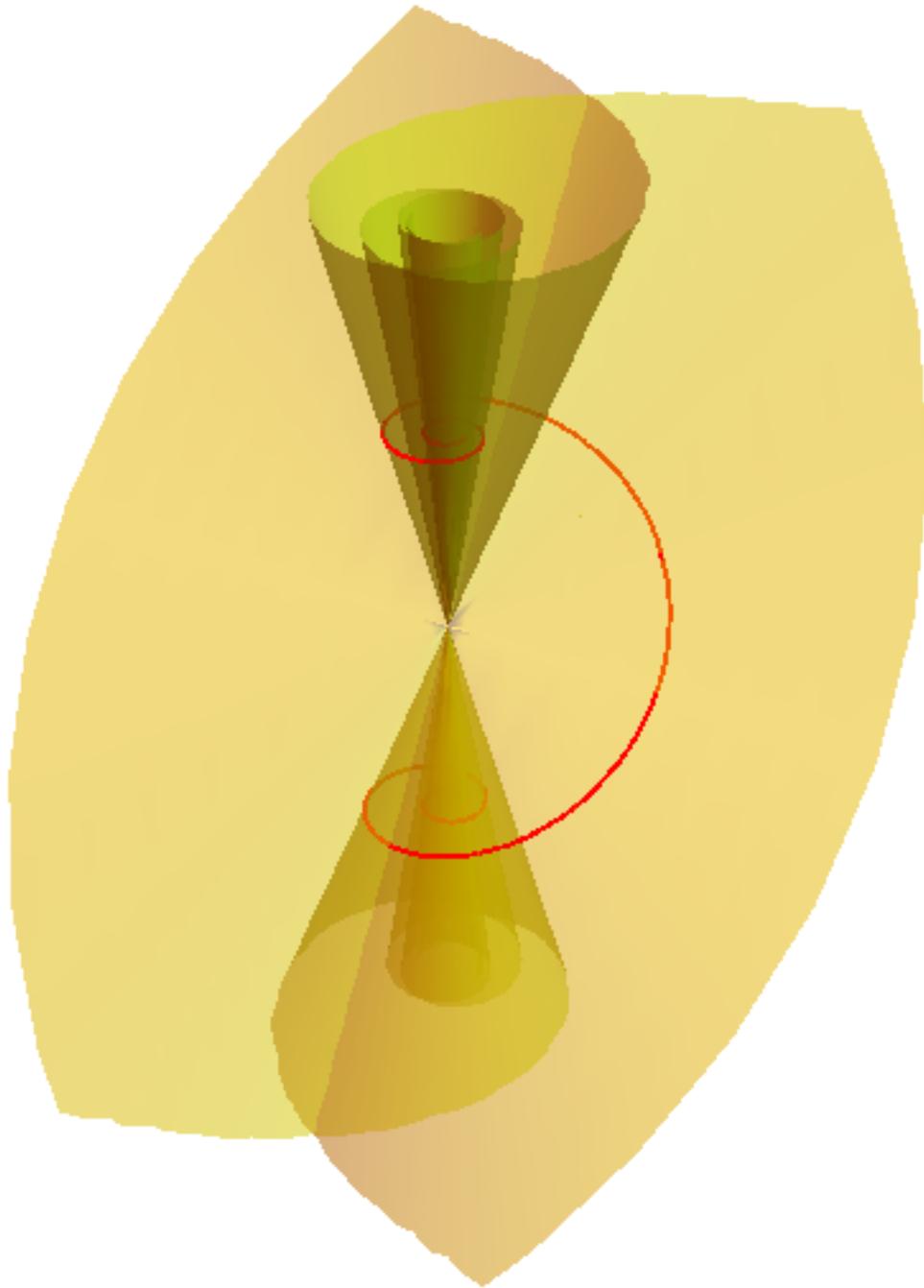


FIGURE 3