La géométrie du groupe de Lie $\mathsf{SU}(2)$

Yvan Saint-Aubin [1]

1 Une courte introduction

Déjà, dans votre courte carrière de mathématiciens, vous avez rencontré une habitude fort féconde des mathématiciens, celle d'ajouter des contraintes ou des structures à celles déjà existantes. Dans un cours d'algèbre linéaire, il est usuel d'étudier les espaces vectoriels abstraits, puis d'étudier ceux munis d'un produit scalaire. Dans un cours de géométrie, l'étude porte d'abord sur les surfaces, puis sur les surfaces munies de la première forme fondamentale. Cet ajout de contraintes ou structures semble restrictif. Mais, même si la classe d'objets à l'étude est plus limitée, les objets sont eux plus riches et de nouvelles propriétés émergent. Pensez à nouveau aux espaces vectoriels : sans produit scalaire, il est impossible de parler de sous-espaces orthogonaux, d'angle entre vecteurs, de meilleure approximation, etc.

Les notes qui suivent marient deux structures qui semblent si lointaines qu'il peut sembler étonnant qu'on ait pensé à les superposer ; ces structures sont usuellement étudiées dans deux cours différents : la géométrie différentielle et l'algèbre abstraite. La famille d'objets à l'étude sera celle des *groupes de Lie* ; ce sont des objets mathématiques très séduisants. Nous en étudierons un seul.

2 $\mathsf{SU}(2)$ est un groupe

Un groupe est un ensemble G muni d'une opération interne $\circ$ qui associe à toute paire d'éléments de G un autre élément de G et ayant les propriétés suivantes :

(i) le produit est associatif : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ pour tout $f, g, h \in G$;

(ii) il existe un élément $e \in G$, appelé l'*élément neutre*, tel que $e \circ g = g \circ e = g$ pour tout $g \in G$ et

(iii) pour tout $g \in G$, il existe un élément $h \in G$, appelé l'inverse de g, tel que $g \circ h = h \circ g = e$.

Le groupe que nous étudierons dans ces notes est le suivant. L'ensemble est

$$\mathsf{SU}(2) = \{g \in \mathbb{C}^{2\times 2} \mid g^\dagger g = I \text{ et } \det g = 1\}$$

et l'opération interne est la multiplication matricielle. L'ensemble $\mathsf{SU}(2)$ est donc un ensemble de matrices 2×2 dont les éléments de matrice sont des nombres complexes. Ces matrices vérifient deux conditions : la seconde est d'être de déterminant 1 et la première est $g^\dagger g = I$. Ici la matrice I (l'élément neutre) est la matrice identité 2×2 et $g^\dagger$ est la matrice obtenue de g en faisant la conjugaison complexe de tous ses éléments de matrice, puis la transposition du résultat. Voici par exemple une paire g et $g^\dagger$:

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad g^\dagger = \begin{pmatrix} \bar a & \bar c \\ \bar b & \bar d \end{pmatrix}.$$

La contrainte $g^\dagger g = I$ dit donc que, pour appartenir à G, une matrice $g \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ doit être telle que son inverse est simplement obtenue en faisant ces conjugaison complexe et transposition. Cette contrainte est nommée la *condition d'unitarité* qui explique le U du nom de l'ensemble $\mathsf{SU}(2)$. (Le S signifie « spécial », c'est-à-dire de déterminant 1.) Plusieurs matrices respectent ces deux contraintes, par exemple les trois familles (infinies) suivantes :

$$a(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \qquad b(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\psi}{2} & -\sin\frac{\psi}{2} \\ \sin\frac{\psi}{2} & \cos\frac{\psi}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad c(\phi) = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi/2} \end{pmatrix}.$$

1. Merci à Alexandre Girouard et Jordan Payette pour leurs nombreux commentaires et suggestions.

Pour toute valeur de $\phi, \psi, \theta \in \mathbb{R}$, ces matrices $a(\phi)$, $b(\psi)$ et $c(\theta)$ sont des éléments de $SU(2)$.

Pour affirmer que l'ensemble de matrices $SU(2)$ forme un groupe, il faut vérifier les conditions définissant un groupe. La première est la condition d'« être interne », c'est-à-dire le produit de deux matrices unitaires et de déterminant 1 est unitaire et de déterminant 1. (Lorsque nous noterons explicitement la multiplication matricielle, nous utiliserons le symbole « $\cdot$ ».) Puisque $\det(g \cdot h) = \det g \det h$ pour toute paire de matrices, la condition sur le déterminant est satisfaite. Si g et h sont dans $SU(2)$, alors $g^{-1} = g^\dagger$ et $h^{-1} = h^\dagger$ et alors

$$(g \cdot h)^{-1} \stackrel{1}{=} h^{-1} \cdot g^{-1} \stackrel{2}{=} h^\dagger \cdot g^\dagger \stackrel{3}{=} (\bar{h})^t \cdot (\bar{g})^t \stackrel{4}{=} (\overline{gh})^t \stackrel{5}{=} \overline{(gh)^t} = (gh)^\dagger$$

où chacune des étapes est justifiée comme suit : l'étape 1 suit du fait que l'inverse d'un produit matriciel est le produit des inverses (dans l'ordre opposé !), 2 suit de l'unitarité de g et h, 3 utilise la définition de « $\dagger$ », 4 est la transposée d'un produit et 5 suit du fait que la conjugaison complexe et la transposition sont deux opérations qui commutent. Ceci termine la vérification que l'opération est interne.

Les autres conditions sont beaucoup plus aisées à vérifier ! L'opération interne est associative puisque la multiplication matricielle l'est. Le neutre est la matrice identité 2×2. Est-ce que tout $g \in SU(2)$ possède un inverse h également dans $SU(2)$? La définition même de $SU(2)$ nous dit que cet inverse de g est $g^\dagger$? Donc la question est : si g est dans $SU(2)$, est-ce que $g^\dagger$ est aussi dans $SU(2)$? La réponse est oui : puisque $g^\dagger g = I$, l'inverse de $g^\dagger$ est g. Ainsi l'inverse de $g^\dagger$ est $g = (g^\dagger)^\dagger$ et est donc dans $SU(2)$. Donc l'inverse de g est dans $SU(2)$.

Il est temps de dresser un premier bilan :

$SU(2)$ ***est un groupe.***

En fait $SU(2)$ est un exemple de *groupes de Lie*, une famille de groupes qui sont des « surfaces » et où la multiplication et l'opération de prendre l'inverse sont des fonctions C^∞ (en fait analytiques !).

Exercice 1. Soit $SU(n) = \{g \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid g^\dagger g = I_{n\times n} \text{ et } \det g = 1\}$. Est-ce un groupe ? Pour tout n ?

Exercice 2. Pour ceux qui connaissent la théorie des groupes.
(i) Est-ce $SU(2)$ est un groupe fini ? abélien ?
(ii) Est-ce que $\{a(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\} \subset SU(2)$ est un sous-groupe de $SU(2)$? Que dire de $\{b(\psi) \mid \psi \in \mathbb{R}\}$ et $\{c(\phi) \mid \phi \in \mathbb{R}\}$?

Exercice 3. (i) Montrer que les valeurs propres d'une matrice unitaire sont des nombres complexes λ sur le cercle de rayon unité : $|\lambda|^2 = 1$. Suggestion : utilisez comme point de départ que $\|gv\|^2 = \|v\|^2$ pour tout $v \in \mathbb{C}^n$ si g est une matrice unitaire $n \times n$. Il faudra aussi vérifier ce dernier énoncé en se rappelant de la définition du produit scalaire sur $\mathbb{C}^n$!)
(ii) Montrer que toute matrice unitaire g est diagonalisable. Suggestion : construire une base $\mathcal{B} = \{v, w_2, w_3, \ldots, w_n\}$ orthonormée (pour le produit scalaire sur $\mathbb{C}^n$) dont le premier vecteur v est un vecteur propre de g. Utiliser alors le fait que la matrice a dont les vecteurs colonnes sont les éléments de la base $\mathcal{B}$ est unitaire, puis que $a^\dagger g a$ est unitaire.

3 $SU(2)$ est une surface

Les deux conditions définissant les éléments de $SU(2)$ peuvent être aisément résolues. La condition d'unitarité donne

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}.$$

Mais l'inverse d'une matrice g prend une forme simple dans le cas 2×2 :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det g} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Puisque les éléments de $SU(2)$ ont déterminant 1, alors $g^\dagger = g^{-1}$ mène aux quatre équations que voici :

$$\bar{a} = d, \qquad \bar{b} = -c, \qquad \bar{c} = -b \qquad \text{et} \qquad \bar{d} = a$$

et donc

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

La condition de déterminant unité est alors $1 = |a|^2 + |b|^2$. Si les nombres complexes a et b sont écrits en termes de leurs parties réelle et imaginaire ($a = x + iy$ et $b = s + it$ avec $x, y, s, t \in \mathbb{R}$), alors la matrice g donnée en (1) est un élément de $SU(2)$ si et seulement si

$$x^2 + y^2 + s^2 + t^2 = 1. \tag{2}$$

Ceci est l'équation d'une sphère de rayon un dans l'espace $\mathbb{R}^4$ où les coordonnées sont les (x, y, s, t).

Le cours de géométrie différentielle s'est concentré sur les surfaces dans $\mathbb{R}^3$, mais il est aisé d'étendre la définition de surface à des ensembles dans $\mathbb{R}^n, n \geq 3$. Dans le cas présent, les paramétrages de $SU(2)$ vu comme la sphère S^3 seront des fonctions $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^3 \to S^3 \subset \mathbb{R}^4$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Ces fonctions $\mathbf{x}$ qui couvriront la sphère devront vérifier les conditions usuelles : elles seront C^∞, bijective et régulière. Il est facile d'utiliser la condition $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 1$ pour décider de la régularité du paramétrage $\mathbf{x}$ des surfaces dans $\mathbb{R}^3$. Mais, pour les surfaces dans des espaces de dimension plus grande, nous n'avons pas défini d'analogue du produit vectoriel. Alors, pour les surfaces dans $\mathbb{R}^4$, remplaçons la condition du produit vectoriel non nul par la condition que les trois vecteurs $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ et $\mathbf{x}_w \in \mathbb{R}^4$ soient linéairement indépendants. Avec cette généralisation, cette section permet de conclure :

$SU(2)$ ***est une surface dans*** $\mathbb{R}^4$***.***

L'exercice suivant permet de vérifier toutes les conditions de la définition généralisée.

La bijection qu'établit l'équation (2) entre les éléments de $SU(2)$ et les points de la sphère $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ permet donc de réfléchir au groupe $SU(2)$ en termes géométriques. Une mise en garde s'impose cependant. Premièrement nous aurions pu voir l'ensemble des matrices unitaires 2×2 comme un sous-ensemble des matrices complexes 2×2 qui est un espace euclidien réel de dimension 8. Alors l'ensemble $SU(2)$ serait alors une sphère dans $\mathbb{R}^8$ et l'analogie avec la définition de surfaces régulières $\subset \mathbb{R}^3$ n'est pas aussi convaincante puisque son plan tangent n'est pas de dimension $8 - 1 = 7$. Deuxièmement les groupes unitaires $SU(n), n \geq 3$, ne sont pas des sphères dans un espace euclidien. Le groupe des matrices orthogonales $SO(3)$ de déterminant 1 n'est pas une sphère non plus. Sa géométrie est plus complexe. Si $g \in SO(3)$ est une matrice orthogonale, chacun de ses vecteurs colonnes est de longueur unité et l'ensemble $SO(3)$ est un sous-ensemble de l'intersection de trois cylindres

$$g_{11}^2 + g_{21}^2 + g_{31}^2 = 1, \qquad g_{12}^2 + g_{22}^2 + g_{32}^2 = 1, \qquad \text{et} \qquad g_{13}^2 + g_{23}^2 + g_{33}^2 = 1$$

dans $\mathbb{R}^{3\times 3} \simeq \mathbb{R}^9$. (Exercice : Pourquoi sont-ce des cylindres ? ou plus précisément des « cylindres généralisés » ?) Et ces équations n'épuisent pas les contraintes définissant une matrice orthogonale puisque ses colonnes sont orthogonales deux à deux. Le caractère simple de la « surface » représentant $SU(2)$ est un peu une chance. Il nous permet de passer rapidement de la géométrie différentielle classique à ce groupe de Lie. Mais l'étude des groupes de Lie en général est toujours faite à l'aide du concept de variété, une généralisation de celui de surfaces.

Exercice 4. Montrer que la carte $\mathbf{x} : D \subset \mathbb{R}^3 \to S^3$ où $D = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 + v^2 + w^2 < 1\}$ et $\mathbf{x}(u, v, w) = (u, v, w, +\sqrt{1 - u^2 - v^2 - w^2})$ est un paramétrage régulier de S^3. Quels sont les points de S^3 couverts par ce paramétrage ? Définir suffisamment de paramétrages pour que tout point de S^3 soit couvert par au moins un paramétrage. En conclure que $SU(2)$ est une surface régulière dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5. Montrer que $\mathbf{y}(\theta, \psi, \phi) = a(\theta) \cdot b(\psi) \cdot c(\phi)$ est un paramétrage de $SU(2)$. Attention : il faudra déterminer un domaine ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$ tel que $\mathbf{y}$ soit régulière. Décrire alors l'ensemble des points de $SU(2)$ qui ne sont pas couverts par $\mathbf{y}$ et suggérer une façon de les couvrir.

Exercice 6. (i) Considérons les familles de matrices $a(\theta), b(\psi), c(\phi)$ comme des courbes $a, b, c : \mathbb{R} \to SU(2)$ sur le groupe. Sont-elles régulières ? Remarque : il faudra étendre d'abord la définition de courbe régulière au cas présent.
(ii) Montrer que a, b et c sont des grands cercles sur S^3.

4 Les vecteurs tangents à $SU(2)$ en l'identité

Il est possible d'oublier que $SU(2)$ est un groupe et de n'utiliser que le fait que $SU(2)$ soit une surface pour en poursuivre l'étude comme dans le cours de géométrie différentielle. Alors il suffit d'étendre les définitions de surface dans $\mathbb{R}^3$ à celles dans $\mathbb{R}^4$ dont le plan tangent est de dimension 3. C'est possible, mais c'est manquer une chance de faire jouer son rôle à une des structures de $SU(2)$. Nous opterons pour un chemin qui fait place aux deux structures : l'algébrique ($SU(2)$ est un groupe) et la géométrique ($SU(2)$ est une surface).

Commençons par l'étude du plan tangent au point $I \in SU(2)$. Puisque les points de $SU(2)$ sont en bijection avec ceux de la sphère S^3 dans $\mathbb{R}^4$, le plan tangent sera de dimension 3. (Exercice : vous en convaincre.) Les trois courbes $a(\theta)$, $b(\psi)$ et $c(\phi)$ se croisent toutes en I lorsque leur paramètre est nul. La dérivée de ces courbes en I est donc

$$\mathbf{y}_\theta = \left.\frac{da}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}_\psi = \left.\frac{db}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{y}_\phi = \left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Puisque les points de $SU(2)$ sont des matrices, les vecteurs tangents à $SU(2)$ peuvent être vus comme des matrices. Un peu étrange, mais très utile comme nous le verrons à l'instant.

Remarquons que les vecteurs tangents aux trois courbes $a(\theta)$, $b(\psi)$ et $c(\phi)$ sont des matrices anti-hermitiennes, c'est-à-dire qu'elles vérifient toutes la propriété suivante

$$x^\dagger = -x.$$

L'espace tangent $T_I G$ à un groupe G en son identité est souvent noté $\mathfrak{g}$. Alors, pour $SU(2)$, cet espace tangent est

$$\mathfrak{g} = T_I SU(2) = \{\mu \mathbf{y}_\theta + \nu \mathbf{y}_\psi + \rho \mathbf{y}_\phi \mid \mu, \nu, \rho \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{C}^{2\times 2} \mid x^\dagger = -x \text{ et } \operatorname{tr} x = 0\}. \tag{3}$$

L'exercice 7 ci-dessous vérifie que les trois vecteurs $\mathbf{y}_\theta, \mathbf{y}_\psi$ et $\mathbf{y}_\phi$ sont linéairement indépendants (comme il se doit puisque $\mathbf{y}$ est régulière et le plan tangent en I à $SU(2)$ est tri-dimensionnel) et démontre l'égalité entre les deux descriptions de ce plan tangent : en termes de combinaisons linéaires des vecteurs tangents aux courbes $a(\theta)$, $b(\psi)$ et $c(\phi)$ d'une part et en termes de la condition d'anti-hermiticité d'autre part.

Il existe un produit scalaire naturel sur l'espace vectoriel des matrices anti-hermitiennes $n \times n$. Soit $\langle\ ,\ \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ défini par

$$\langle x, y \rangle = \operatorname{tr} x^\dagger y.$$

(Ici $\mathfrak{g}$ peut être l'ensemble des matrices anti-hermitiennes $n \times n$, $n > 2$, ou le plan tangent $T_I SU(2)$.) Par exemple, le produit scalaire de $\mathbf{y}_\theta$ et $\mathbf{y}_\psi$ est

$$\langle \mathbf{y}_\theta, \mathbf{y}_\psi \rangle = \operatorname{tr} \left(\frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^\dagger \left(\frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{4} \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \operatorname{tr} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = 0.$$

Exercice 7. (i) Montrer que les trois matrices $\mathbf{y}_\theta$, $\mathbf{y}_\psi$ et $\mathbf{y}_\phi$ sont linéairement indépendantes et qu'elles engendrent donc un sous-espace de dimension réelle 3 dans $\mathbb{C}^{2\times 2}$. Note : les combinaisons linéaires sont à coefficients réels ; ainsi la dimension de $\mathfrak{g}$ est trois sur le corps des réels.
(ii) Montrer que ces trois matrices engendrent toutes les matrices anti-hermitiennes 2×2 de trace nulle. La solution à cette question démontre la dernière égalité dans l'équation (3) ci-dessus.

Exercice 8. (i) Montrer que la fonction $\langle\ ,\ \rangle$ vérifie les trois propriétés définissant un produit scalaire (quel que soit $n \geq 2$).
(ii) Montrer que la base $\{\mathbf{y}_\theta, \mathbf{y}_\psi, \mathbf{y}_\phi\}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ et que tous ces éléments sont d'égale longueur.

Exercice 9. (i) Soit $g \in SU(2)$ et $x \in \mathfrak{g}$. Montrer que $gxg^{-1} (= gxg^\dagger)$ est aussi un élément de $\mathfrak{g}$. Note pour ceux qui connaissent les actions de groupe : cette question montre que $Ad : SU(2) \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ défini par $(g, x) \mapsto Ad_g(x) = gxg^\dagger$ est une action de $SU(2)$ sur $\mathfrak{g}$. Cette action se nomme l'action adjointe.
(ii) Montrer que le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ a la propriété suivante : $\langle Ad_g(x), Ad_g(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ pour tout $g \in SU(2)$ et $x, y \in \mathfrak{g}$.

5 La première forme fondamentale de $SU(2)$

À nouveau, il est tentant de définir la première fondamentale $SU(2)$ comme la restriction du produit scalaire sur $\mathbb{R}^4$ à la sphère S^3. Mais nous définirons plutôt une première forme intimement liée à la structure du groupe. Cette définition se généralise de façon directe à tous les autres groupes matriciels continus.

Nous avons construit (parfois assez laborieusement) des isométries (locales) entre certaines surfaces. (Par exemple l'exercice # 18, p. 66, de Shifrin permet de montrer que l'hélicoïde et le caténoïde sont localement isométriques.) Dans le cas du groupe $SU(2)$, nous pouvons choisir la première forme fondamentale pour qu'elle possède une infinité d'isométries non triviales, ce qui nous permettra de déterminer aisément les géodésiques. Nous utiliserons en fait le produit scalaire sur $\mathfrak{g}$ pour définir la première forme fondamentale partout sur le groupe $SU(2)$. Au point I, la première forme fondamentale sera simplement $\mathbf{g}_I(x, y) = \langle x, y \rangle$. Voici comment $\mathbf{g}$ est étendue aux autres points de $SU(2)$.

Soit $g_0 \in SU(2)$ un élément du groupe et soit la fonction $L_{g_0} : SU(2) \to SU(2)$ définie par $L_{g_0}(g) = g_0 \cdot g$ où, comme d'habitude, « $\cdot$ » dénote la multiplication matricielle. C'est bien une fonction de $SU(2)$ vers $SU(2)$ puisque le produit de deux matrices unitaires telles g_0 et g est unitaire. De plus la fonction L_{g_0} est une bijection avec $L_{g_0^{-1}}$ comme inverse. C'est un difféomorphisme de $SU(2)$ nommé la translation à gauche par g_0.

Soient deux courbes $\gamma(t), \delta(t) \in SU(2)$ telles que $\gamma(0) = \delta(0) = I_{2\times 2}$. Alors les courbes $L_{g_0} \circ \gamma$ et $L_{g_0} \circ \delta$ passent en g_0 lorsque $t = 0$ et leur vecteur tangent en $t = 0$ appartient au plan tangent $T_{g_0} SU(2)$. La première forme fondamentale $\mathbf{g}_{g_0} : T_{g_0}SU(2) \times T_{g_0}SU(2) \to \mathbb{R}$ est définie par

$$\mathbf{g}_{g_0}(g_0 \cdot \gamma'(0), g_0 \cdot \delta'(0)) = \mathbf{g}_I(\gamma'(0), \delta'(0)). \tag{4}$$

Voilà ! Un exercice ci-dessous montre que cette définition assure que toutes les translations L_g, $g \in SU(2)$, sont des isométries ! Il y a donc une infinité d'isométries non triviales. (Et comme l'exercice le montrera, ce ne sont pas les seules !)

Cette définition paraît un peu redoutable. Calculons l'expression de cette première forme fondamentale dans la base induite par le paramétrage $\mathbf{y}(\theta, \psi, \phi) = a(\theta) \cdot b(\psi) \cdot c(\phi)$. Soit g_0 le point $\mathbf{y}(\theta_0, \psi_0, \phi_0)$ de $SU(2)$ (pour des θ_0, ψ_0 et ϕ_0 dans le domaine de $\mathbf{y}$). Les trois vecteurs induits par ce paramétrage en g_0 sont

$$\mathbf{y}_\theta = a'(\theta_0)b(\psi_0)c(\phi_0), \qquad \mathbf{y}_\psi = a(\theta_0)b'(\psi_0)c(\phi_0) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{y}_\phi = a(\theta_0)b(\psi_0)c'(\phi_0).$$

Pour utiliser la définition de $\mathbf{g}$, il faut réécrire ces vecteurs tangents sous la forme $g_0 \cdot \gamma'$ pour une certaine courbe γ. Voici ce travail fait pour le premier vecteur de la base :

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_\theta &= a'(\theta_0)b(\psi_0)c(\phi_0) \\
&= (g_0 g_0^{-1}) \cdot a'(\theta_0)b(\psi_0)c(\phi_0) \\
&= g_0\big(c(\phi_0)^{-1}b(\psi_0)^{-1}a(\theta_0)^{-1}a'(\theta_0)b(\psi_0)c(\phi_0)\big).
\end{aligned}$$

Le calcul pour les deux autres est un peu plus simple :

$$\mathbf{y}_\psi = g_0\big(c(\phi_0)^{-1}b(\psi_0)^{-1}b'(\psi_0)c(\phi_0)\big) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{y}_\phi = g_0\big(c(\phi_0)^{-1}c'(\phi_0)\big).$$

Ainsi $\mathbf{g}_{g_0}$ exprimée dans la base $\{\mathbf{y}_\theta, \mathbf{y}_\psi, \mathbf{y}_\phi\}$ en ce point est la matrice représentant $\mathbf{g}_I$ calculée dans la base

$$\begin{aligned}
\{\, v_1 &= \big(c(\phi_0)^{-1}b(\psi_0)^{-1}a(\theta_0)^{-1}a'(\theta_0)b(\psi_0)c(\phi_0)\big), \\
v_2 &= \big(c(\phi_0)^{-1}b(\psi_0)^{-1}b'(\psi_0)c(\phi_0)\big), \\
v_3 &= \big(c(\phi_0)^{-1}c'(\phi_0)\big)\,\}.
\end{aligned}$$

La complexité de ces expressions est un peu décourageante. Mais il y a de bonnes nouvelles. La première est que chacune des ces trois matrices v_1, v_2 et v_3 est anti-hermitienne pour tout θ_0, ψ_0 et ϕ_0. (Voir exercice 10.) Puisque la solution de l'exercice 8 utilise le fait que les matrices considérées sont anti-hermitiennes, le fait que v_1, v_2, v_3 appartiennent à $\mathfrak{g}$ est une condition nécessaire pour que la définition (4) ait du sens ! La seconde bonne nouvelle est que l'expression de la première forme fondamentale $\mathbf{g}_{g_0}$ est étonnament simple dans la base induite $\{\mathbf{y}_\theta, \mathbf{y}_\psi, \mathbf{y}_\phi\}$:

$$[\mathbf{g}_{g_0}]_{\{\mathbf{y}_\theta, \mathbf{y}_\psi, \mathbf{y}_\phi\}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sin\psi_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi_0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. (i) Montrer que $a(\theta)^{-1}a'(\theta)$, $b(\psi)^{-1}b'(\psi)$ et $c(\phi)^{-1}c'(\phi)$ appartiennent à $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire qu'elles sont anti-hermitiennes.
(ii) Montrer que, si $g \in SU(2)$ et $x \in \mathfrak{g}$, alors $g^{-1}xg \in \mathfrak{g}$.
(iii) Calculer la forme matricielle de v_1, v_2 et v_3. Solution :

$$v_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i\sin\psi & ie^{i\phi}\cos\psi \\ ie^{-i\phi}\cos\psi & i\sin\psi \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -e^{i\phi} \\ e^{-i\phi} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad v_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

(iv) La vérification de quelques éléments de $[\mathbf{g}_{g_0}]_{\{\mathbf{y}_\theta, \mathbf{y}_\psi, \mathbf{y}_\phi\}}$ devrait être aisée maintenant. Allez-y pour quelques-uns !

Exercice 11. (i) Vérifier que L_{g_0} est une isométrie de $(SU(2), \mathbf{g})$ pour tout $g_0 \in SU(2)$.
(ii) Soit $g_0 \in SU(2)$ et $R_{g_0} : G \to G$ la fonction définie par $R_{g_0}(g) = g \cdot g_0$. Montrer que cette fonction R_{g_0}, appelée translation à droite, est une isométrie de $(SU(2), \mathbf{g})$ pour tout $g_0 \in SU(2)$. Note pour ceux qui connaissent les groupes : on peut montrer que le groupe d'isométries de $SU(2)$ est isomorphe à $SU(2) \times SU(2) \simeq \{(L_g, R_{g'}) \mid g, g' \in SU(2)\}$.

Exercice 12. Vérifier que la première forme fondamentale $\mathbf{g}$ sur les plans tangents de $SU(2)$ coïncident à une constante près à la restriction du produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^4$ à la sphère $S^3 \simeq SU(2)$. Note : je sais que ceci est vrai, mais je n'ai pas fait le calcul explicitement à partir de $\mathbf{y}$ et du paramétrage $\mathbf{x}$ introduit à l'exercice 4. Il est possible que les calculs soient difficiles...

6 Les géodésiques de $SU(2)$

Quoique tous les outils aient été développés pour les surfaces $\subset \mathbb{R}^3$, le calcul des géodésiques peut être étendu sans difficulté aux groupes de Lie matriciels. En fait, les groupes de Lie sont des exemples de « surfaces » dont *toutes* les géodésiques sont connues.

Parallèment aux relations obtenues par Shifrin pour les symboles de Christoffel (p. 58), nous avons aussi écrit les Γ^i_{jk} en termes des dérivées de la première forme fondamentale sous la forme :

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{1 \le \ell \le n} (\mathbf{g}^{-1})_{i\ell} (\mathbf{g}_{j\ell,k} + \mathbf{g}_{\ell k,j} - \mathbf{g}_{jk,\ell}) \tag{5}$$

où n est la dimension du plan tangent, les indices satisfont tous $1 \le i, j, k \le n$ et $\mathbf{g}_{ij,k}$ signifie $\partial \mathbf{g}_{ij} / \partial x_k$. (Exercice : choisir $n = 2$ et une valeur pour chacun des i, j, k dans l'ensemble $\{u, v\}$ et vérifier que la formule suivante redonne l'expression correspondante de Shifrin.) Nous ferons correspondre les variables θ, ψ, ϕ aux entiers $1, 2, 3$:

$$\theta \leftrightarrow 1, \qquad \psi \leftrightarrow 2, \qquad \phi \leftrightarrow 3.$$

Pour $SU(2)$, seulement deux des éléments de matrice de $[\mathbf{g}_g]$ possède des dérivées non nulles et alors seule la dérivée par rapport à ψ est non nulle : $[\mathbf{g}_g]_{13,2} = [\mathbf{g}_g]_{31,2} = \frac{1}{2}\cos\psi$. Le calcul des symboles de Christoffel est assez aisé. Les seuls Γ^i_{jk} non nuls sont

$$\Gamma^\theta_{\theta\psi} = \Gamma^1_{12} = -\tfrac{1}{2}\tan\psi, \qquad \Gamma^\theta_{\psi\phi} = \Gamma^1_{23} = \tfrac{1}{2}\sec\psi, \qquad \Gamma^\psi_{\theta\phi} = \Gamma^2_{13} = -\tfrac{1}{2}\cos\psi,$$
$$\Gamma^\phi_{\theta\psi} = \Gamma^3_{12} = \tfrac{1}{2}\sec\psi, \qquad \Gamma^\phi_{\psi\phi} = \Gamma^3_{23} = -\tfrac{1}{2}\tan\psi.$$

(Vous remarquerez que nous utilisons indifféremment le nom de la variable ou l'entier qui lui est associé. Cet usage semble inutile, mais il est assez répandu et fort utile.)

Comme pour les symboles de Christoffel, la généralisation des équations géodésiques aux surfaces à n dimensions est aisée. Si $\gamma(s) = \mathbf{y}(x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s))$ est une géodésique, ses coordonnées doivent vérifier les équations différentielles ordinaires non linéaires

$$0 = x_i'' + \sum_{1 \le j,k \le n} \Gamma^i_{jk} x_j' x_k'.$$

(Exercice : poser $i \to u$ (puis $\to v$) et vérifier que, pour $n = 2$, les équations ci-dessus sont les équations géodésiques (♣♣) données par Shifrin à la p. 71.) Les équations géodésiques dans le paramétrage $\mathbf{y}$ sont donc

$$
\begin{aligned}
0 &= \theta'' - \theta'\psi' \tan\psi + \psi'\phi' \sec\psi, \\
0 &= \psi'' - \theta'\phi' \cos\psi, \\
0 &= \phi'' + \theta'\psi' \sec\psi - \psi'\phi' \tan\psi.
\end{aligned}
$$

Malgré leur apparence et leur non linéarité, ces équations sont simples. Nous en connaissons déjà trois solutions ! En effet, en prenant $(\theta(s), \psi(s), \phi(s)) = (s, 0, 0)$, les dérivées seront $\theta' = 1$ et $\theta'' = 0$ et $\psi' = \psi'' = \phi' = \phi'' = 0$ et un coup d'oeil suffit à vérifier que toutes les équations sont trivialement vérifiées. Similairement, les courbes données par $(\theta(s), \psi(s), \phi(s)) = (0, s, 0)$ et $(\theta(s), \psi(s), \phi(s)) = (0, 0, s)$ sont géodésiques ! Ainsi

les courbes $a(\theta)$**,** $b(\psi)$ ***et*** $c(\phi)$ ***sont des géodésiques avec paramètre longueur d'arc*** θ**,** ψ ***et*** ϕ ***respectivement.***

En fait, avec les résultats accumulés à ce point, le lecteur pourra aisément trouver toutes les géodésiques !

Exercice 13. (i) Montrer que $L_{g_0} \circ a(\theta)$, $L_{g_0} \circ b(\psi)$, $L_{g_0} \circ c(\phi)$ sont des géodésiques.
(ii) Montrer que $R_{g_0} \circ a(\theta)$, $R_{g_0} \circ b(\psi)$, $R_{g_0} \circ c(\phi)$ sont des géodésiques.
(iii) Soit $SU(2) \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ l'action du groupe sur le plan tangent à l'identité donnée par gxg^{-1} pour $x \in \mathfrak{g}$ et $g \in SU(2)$. Montrer que cette action est transitive sur les éléments $x \in \mathfrak{g}$ de longueur 1. Note : cet exercice est plus difficile !
(iv) Montrer qu'il est possible de construire toutes les géodésiques à partir des trois $a(\theta)$, $b(\psi)$ et $c(\phi)$.

7 Les courbures sectionnelles de $SU(2)$

Notre dernier but dans l'étude des *propriétés géométriques* de $SU(2)$ est d'en étudier la courbure. Le *theorema egregium* dit que la courbure gaussienne ne dépend que de la première forme fondamentale et la question naturelle est alors : quelle est la généralisation de la courbure de Gauss pour les surfaces dans $\mathbb{R}^n$? Et cette généralisation est-elle invariante sous les isométries ?

Si une surface dans $\mathbb{R}^{n+1}$ a un plan tangent de dimension n, alors il est possible de définir un vecteur unitaire $\hat{n}$ normal à ce plan tangent. Alors l'application de Gauss (section 2.2 de Shifrin) peut être définie et son déterminant pourrait peut-être être une généralisation de la courbure gaussienne. Mais cette avenue dépend de la connaissance du plongement de $SU(2)$ dans $\mathbb{R}^4$. Nous connaissons ce plongement pour $SU(2)$, mais qu'en sera-t-il pour les autres groupes matriciels ?

Une autre piste est d'utiliser les équations de Gauss (p. 60 de Shifrin). Dans ces relations, la courbure de Gauss K est exprimée de quatre façons distinctes en termes des symboles de Christoffel et de leurs dérivées. Mais, si le plan tangent de la « surface » considérée est de dimension n, comment doit-on remplacer les u et v qui apparaissent dans ces équations ?

La réponse à cette question est dans la définition du *tenseur de Riemann*, un nouvel objet géométrique dont les quatre indices i, j, k, ℓ sont tous éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$. Soit $\mathbf{y}$ un paramétrage de la « surface » considérée et $\{\mathbf{y}_i, 1 \leq i \leq n\}$ la base induite. (Le vecteur de base $\mathbf{y}_i$ est la dérivée par rapport à la i-ième variable x_i du paramétrage $\mathbf{y}$.) Avec cette notation, voici l'expression du tenseur de Rieman :

$$
R^i_{jk\ell} = \Gamma^i_{\ell j,k} - \Gamma^i_{kj,\ell} + \sum_{1 \leq m \leq n} (\Gamma^i_{km}\Gamma^m_{\ell j} - \Gamma^i_{\ell m}\Gamma^m_{kj})
$$

où les symboles de Christoffel sont obtenus à partir de (5). L'expression est redoutable et vous serez peut-être surpris d'apprendre que vous l'avez déjà rencontrée ! (Je vous suggère d'interrompre votre lecture pour aller faire l'exercice 14 (i) ci-dessous.) Puisque les quatre indices prennent n valeurs distinctes chacune, le tenseur de Riemann a n^4 composantes. Mais plusieurs sont liées entre elles. Par exemple il est facile de vérifier que $R^i_{jk\ell} = -R^i_{j\ell k}$. En fait, nous ne serons intéressés qu'à certaines combinaisons particulières de ces composantes. Ce sont celles définissant les courbures sectionnelles $K(r,s)$ de la surface où r, s sont deux vecteurs *linéairement indépendants* dans un plan tangent donné. Soient r_i et s_i, $1 \le i \le n$, les composantes des vecteurs r et s dans la base $\{\mathbf{y}_i\}$:

$$r = \sum_{1 \le i \le n} r_i \mathbf{y}_i \qquad \text{et} \qquad s = \sum_{1 \le i \le n} s_i \mathbf{y}_i.$$

Alors la *courbure sectionnelle* du plan engendré par r et s est donnée par

$$K(r,s) = \frac{1}{\mathbf{g}(r,r)\mathbf{g}(s,s) - \mathbf{g}(r,s)^2} \sum_{i,j,k,\ell,m=1}^{n} R^i_{jk\ell}[\mathbf{g}]_{i,m} r_m s_j r_k s_\ell.$$

(Le dénominateur s'annule si les vecteurs r et s sont linérairement dépendants.) Il est possible de montrer que $K(r,s)$ ne dépend que du plan qu'ils engendrent.

La courbure sectionnelle est la généralisation naturelle de la courbure gaussienne. Posons $n = 2$. Puisque la courbure sectionnelle ne dépend que du plan engendré par r et s et que le plan tangent d'une surface $\subset \mathbb{R}^3$ est de dimension 2, il n'y aura qu'une seule courbure sectionnelle. Pour la calculer, choisissons comme r et s les deux vecteurs de la base induite par une paramétrisation $\mathbf{x}$. Ces vecteurs ont souvent été notés $\mathbf{x}_u$ et $\mathbf{x}_v$ dans Shifrin. Alors les composantes de $\mathbf{x}_u$ dans la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ sont $(1,0)$ et celles de $\mathbf{x}_v$ sont $(0,1)$. La définition de courbure sectionnelle prend alors une forme un peu plus acceptable, car un seul terme est non nul dans chacune des sommes sur m, j, k et ℓ :

$$\begin{aligned}
K(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) &= \frac{1}{\mathbf{g}(\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_u)\mathbf{g}(\mathbf{x}_v,\mathbf{x}_v) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v)^2} \sum_{i,j,k,\ell,m=1}^{2} R^i_{jk\ell}[\mathbf{g}]_{i,m}(\mathbf{x}_u)_m(\mathbf{x}_v)_j(\mathbf{x}_u)_k(\mathbf{x}_v)_\ell \\
&= \frac{1}{EG-F^2} \sum_{m=1}^{2} R^i_{vuv}[\mathbf{g}]_{iu} \\
&= \frac{1}{EG-F^2}(E \cdot R^u_{vuv} + F \cdot R^v_{vuv}) \\
&\stackrel{*}{=} K
\end{aligned}$$

où K est la courbure gaussienne. L'étape $*$ vous est proposée à l'exercice 14 (ii). Il est clair que nous n'avons pas épuisé la géométrie contenue dans le tenseur de Riemann. Mais ce dernier calcul montre que les courbures sectionnelles sont une généralisation « naturelle » de la courbure gaussienne et, puisqu'elles ne dépendent que de la première forme fondamentale, sont invariantes sous isométrie.

Calculons donc les courbures sectionnelles des trois plans $\theta\psi$, $\theta\phi$ et $\psi\phi$ de $SU(2)$. La première étape est le calcul des composantes du tenseur de Riemann. Puisque la dimension des plans tangents à $SU(2)$ est trois, il y a $3^4 = 81$ composantes ; nous savons déjà que plusieurs sont les mêmes au signe près et d'autres sont nulles. Malgré cela, nous nous concentrerons ici sur les seules composantes utiles au calcul des courbures sectionnelles. Les voici :

$$R^\psi_{\theta\psi\theta} = R^\theta_{\phi\theta\phi} = R^\psi_{\phi\psi\phi} = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad R^\phi_{\phi\theta\phi} = -\frac{1}{4}\sin\psi. \tag{6}$$

Calculons cette dernière composante à titre d'exemple :

$$\begin{aligned}
R^{\phi}_{\phi\theta\phi} &= (\Gamma^{\phi}_{\phi\phi})_{,\theta} - (\Gamma^{\phi}_{\theta\phi})_{,\phi} + \sum_{m=1}^{3} (\Gamma^{\phi}_{\theta m}\Gamma^{m}_{\phi\phi} - \Gamma^{\phi}_{\phi m}\Gamma^{m}_{\theta\phi}) \\
&= \quad 0 \quad - \quad 0 \quad + \quad \Gamma^{\phi}_{\theta\psi}\Gamma^{\psi}_{\phi\phi} \quad - \quad \Gamma^{\phi}_{\phi\psi}\Gamma^{\psi}_{\theta\phi} \\
&= -\Gamma^{\phi}_{\phi\psi}\Gamma^{\psi}_{\theta\phi} \\
&= -(-\tfrac{1}{2}\tan\psi)(-\tfrac{1}{2}\cos\psi) \\
&= -\frac{1}{4}\sin\psi.
\end{aligned}$$

La définition des $R^{i}_{jk\ell}$ a été utilisée à la première ligne et, à la seconde, les valeurs des symboles de Christoffel de la section 6 ont été remplacées. Notons que, puisque plusieurs des Γ^{i}_{jk} sont nuls, l'indice m ne peut être que ψ pour les deux termes dans la somme. De tous les termes du $R^{\phi}_{\phi\theta\phi}$, seul $-\Gamma^{\phi}_{\phi\psi}\Gamma^{\psi}_{\theta\phi}$ demeure. À nouveau, utilisant les valeurs explicites des symboles de Christoffel, nous trouvons la valeur annoncée.

Les courbures sectionnelles dans les plans $\theta\psi$, $\theta\phi$ et $\psi\phi$ sont obtenues à partir de la définition $K(r,s)$ ci-dessus. Les dénominateurs sont facilement calculés :

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}(\mathbf{y}_\theta,\mathbf{y}_\theta)\mathbf{g}(\mathbf{y}_\psi,\mathbf{y}_\psi) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_\theta,\mathbf{y}_\psi)^2 &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} - 0 = \tfrac{1}{4}, \\
\mathbf{g}(\mathbf{y}_\theta,\mathbf{y}_\theta)\mathbf{g}(\mathbf{y}_\phi,\mathbf{y}_\phi) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_\theta,\mathbf{y}_\phi)^2 &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} - (\tfrac{1}{2}\sin\psi)^2 = \tfrac{1}{4}\cos^2\psi, \\
\mathbf{g}(\mathbf{y}_\psi,\mathbf{y}_\psi)\mathbf{g}(\mathbf{y}_\phi,\mathbf{y}_\phi) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_\psi,\mathbf{y}_\phi)^2 &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} - 0 = \tfrac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Comme pour l'exemple calculant $K(\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v)$ pour une surface dans $\mathbb{R}^3$, les sommes apparaissant dans l'expression de la courbure sectionnelle pour les trois plans se simplifient grandement. Par exemple pour $K(\mathbf{y}_\theta,\mathbf{y}_\psi)$:

$$\begin{aligned}
K(\mathbf{y}_\theta,\mathbf{y}_\psi) = K(\mathbf{y}_\psi,\mathbf{y}_\theta) &= \frac{1}{1/4}\sum_{1\le i,j,k,\ell,m\le 3} R^{i}_{jkl}[\mathbf{g}]_{im}(\mathbf{y}_\psi)_m(\mathbf{y}_\theta)_j(\mathbf{y}_\psi)_k(\mathbf{y}_\theta)_\ell \\
&= 4\sum_{1\le m\le 3} R^{i}_{\theta\psi\theta}[\mathbf{g}]_{i\psi} \\
&= 2R^{\psi}_{\theta\psi\theta}.
\end{aligned}$$

Similairement les expressions pour les deux autres courbures sectionnelles sont

$$\begin{aligned}
K(\mathbf{y}_\theta,\mathbf{y}_\phi) &= \frac{2}{\cos^2\psi}(R^{\theta}_{\phi\theta\phi} + \sin\psi R^{\phi}_{\phi\theta\phi}) \\
K(\mathbf{y}_\psi,\mathbf{y}_\phi) &= 2R^{\psi}_{\phi\psi\phi}.
\end{aligned}$$

Les composantes calculées en (6) permettent de terminer le calcul :

$$K(\mathbf{y}_\theta,\mathbf{y}_\psi) = K(\mathbf{y}_\theta,\mathbf{y}_\phi) = K(\mathbf{y}_\psi,\mathbf{y}_\phi) = \frac{1}{2}$$

et les trois courbures sectionnelles sont constantes et égales entre elles. En fait il est possible de montrer que la courbure sectionnelle de n'importe quel 2-plan dans l'espace tangent $T_g SU(2)$ a la même courbure sectionnelle. En d'autres mots, le surface $SU(2)$ donne un exemple d'une surface où toutes les courbures sectionnelles sont égales et constantes. Ceci généralise l'exemple de la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ qui est une surface de courbure gaussienne constante.

Exercice 14. (i) Montrer que la première et quatrième équations de Gauss (p. 60 de Shifrin) ont, comme membre de droite, un certain $R^i_{jk\ell}$. Déterminer pour quelles valeurs de i, j, k et ℓ cette coïncidence a lieu. Est-ce que les membres de droite de la seconde et troisième équations de Gauss sont des $R^i_{jk\ell}$?
(ii) Utiliser les équations de Gauss pour montrer l'étape $*$ du calcul établissant que la courbure sectionnelle du plan tangent d'une surface dans $\mathbb{R}^3$ n'est nulle autre que la courbure gaussienne.

Exercice 15. Supposons que la première forme fondamentale $\mathbf{g}$ soit remplacée par une nouvelle $\mathbf{g}'$ qui est un multiple constant de la première : $\mathbf{g}' = \alpha\mathbf{g}$ où α est une constante positive.
(i) Que sont les symboles de Christoffel associés à $\mathbf{g}'$ en termes de ceux associés à $\mathbf{g}$?
(ii) Comment peut-on décrire les géodésiques associées à $\mathbf{g}'$ en termes de celles associées à $\mathbf{g}$?
(iii) Que sont les courbures sectionnelles associées à $\mathbf{g}'$ en termes de celles associées à $\mathbf{g}$?

8 La structure algébrique du plan tangent $\mathfrak{g}$

Cette ultime section revient à une dernière *propriété algébrique* de $SU(2)$ ou, plus précisément, de son plan tangent $\mathfrak{g} = T_I SU(2)$ à l'identité. Elle montre à nouveau le dialogue entre les aspects algébriques et géométriques puisque la nouvelle structure algébrique qui sera introduite provient d'une observation géométrique.

Nous avons introduit les translations à gauche L_{g_0} et à droite R_{g_0} pour un g_0. Une combinaison très utilisée est la forme $L_{g_0} \circ R_{g_0^{-1}}$ qui agit sur un point $g \in G$ par $g \mapsto g_0 g g_0^{-1}$. Cette action est appelée la conjugaison par g_0. (Elle rappelle la forme du changement de bases prescrit par g_0 de la transformation linéaire $x \mapsto g \cdot x$ pour $x \in \mathbb{C}^2$.) Si $d : \mathbb{R} \to SU(2)$ est une courbe passant par l'identité en $t = 0$, c'est-à-dire si $d(t = 0) = I$, alors $g_0 \cdot d(t) \cdot g_0^{-1}$ est aussi une courbe passant en l'identité en $t = 0$ puisque

$$g_0 \cdot d(t = 0) \cdot g_0^{-1} = g_0 \cdot I \cdot g_0^{-1} = I.$$

Le vecteur tangent à cette nouvelle courbe est obtenue par différentiation et

$$\frac{d}{dt}(g_0 \cdot d(t) \cdot g_0^{-1})\Big|_{t=0} = g_0 \cdot \frac{d}{dt} d(t)\Big|_{t=0} \cdot g_0^{-1}.$$

Puisque $d'(0)$ est un élément de $\mathfrak{g}$, la conjugaison sur le groupe induit une transformation linéaire $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ sur le plan tangent : pour chaque $g_0 \in G$, $x \mapsto g_0 \cdot x \cdot g_0^{-1}$. (On vérifie aisément que $g_0 \cdot x \cdot g_0^{-1}$ est anti-hermitienne. En effet, puisque $x \in \mathfrak{g}$, cette matrice vérifie $x^\dagger = -x$ et

$$(g_0 \cdot x \cdot g_0^{-1})^\dagger = (g_0^{-1})^\dagger \cdot x^\dagger \cdot g_0^\dagger = -(g_0 \cdot x \cdot g_0^{-1})$$

puisque $g_0^\dagger = g_0^{-1}$.)

Il existe une autre façon de combiner la courbe $d(t)$ et un élément $x \in \mathfrak{g}$. L'argument ci-dessus montre que $d(t) \cdot x \cdot d(t)^{-1}$ est une courbe, non plus sur $SU(2)$, mais bien dans $\mathfrak{g}$. Puisque

$$\frac{d}{dt}(d(t) \cdot x \cdot d(t)^{-1})\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(d(t) \cdot x \cdot d(t)^{-1} - x),$$

que la différence $(d(t) \cdot x \cdot d(t)^{-1} - x)$ est un élément de $\mathfrak{g}$ et que le sous-espace $\mathfrak{g}$ est fermé dans $\mathbb{C}^{2\times 2}$, la dérivée de cette courbe est aussi un élément de $\mathfrak{g}$. Nous allons calculer cet élément en termes de x et du vecteur tangent y à $d(t)$ en $t = 0$.

Tout d'abord la dérivée de l'inverse d'une matrice telle $d(t)$ qui dépend de t est

$$\frac{d}{dt} d(t)^{-1} = -d(t)^{-1} \cdot \frac{d}{dt} d(t) \cdot d(t)^{-1}.$$

Ceci est obtenu en dérivant l'identité $d \cdot d^{-1} = I$:

$$\frac{d}{dt}d(t) \cdot d(t)^{-1} + d(t) \cdot \frac{d}{dt}d(t)^{-1} = 0$$

ou encore

$$d(t) \cdot \frac{d}{dt}d(t)^{-1} = -\frac{d}{dt}d(t) \cdot d(t)^{-1}$$

et la dérivée de l'inverse est obtenue de cette dernière relation en multipliant à gauche par $d(t)^{-1}$. Si y est le vecteur tangent à $d(t)$ en $t = 0$, alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(d(t) \cdot x \cdot d(t)^{-1})\Big|_{t=0} &= \left(d'(t) \cdot x \cdot d(t)^{-1} - d(t) \cdot x \cdot (d(t)^{-1})'\right)\big|_{t=0} \\ &= \left(d'(t) \cdot x \cdot d(t)^{-1} - d(t) \cdot x \cdot d(t)^{-1} \cdot d'(t) \cdot d(t)^{-1}\right)\big|_{t=0} \\ &= y \cdot x - x \cdot y\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $d(t = 0) = I$. Puisque ceci est un élément de $\mathfrak{g}$ par l'argument précédent, l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ est fermé sous l'opération $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ définie par

$$(x, y) \mapsto [x, y] \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot y - y \cdot x.$$

La paire $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ est une nouvelle structure algébrique, appelée une algèbre de Lie. L'opération interne $[\ ,\ ]$ est appelée le commutateur et il est usuel de dénoter l'algèbre de Lie de $SU(2)$ par $\mathfrak{su}(2)$.

Il est facile de trouver les commutateurs des éléments de la base $\{\mathbf{y}_\theta, \mathbf{y}_\psi, \mathbf{y}_\phi\}$:

$$[\mathbf{y}_\theta, \mathbf{y}_\psi] = \mathbf{y}_\phi, \qquad [\mathbf{y}_\psi, \mathbf{y}_\phi] = \mathbf{y}_\theta \qquad \text{et} \qquad [\mathbf{y}_\phi, \mathbf{y}_\theta] = \mathbf{y}_\psi. \tag{7}$$

Exercice 16. Vérifier les commutations (7).

Exercice 17. (i) Montrer que le commutateur n'est pas une opération associative, mais qu'il vérifie plutôt l'identité de Jacobi :

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \qquad \text{pour tout } x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

(ii) Montrer que $[\ ,\ ]$ est linéaire sur chacune de ses entrées. Par exemple $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y, z \in \mathfrak{g}$.
(iii) Soit $z \in \mathfrak{g}$ et $ad_z : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ la transformation linéaire définie par $ad_z(x) = [z, x]$. Montrer que ad_z vérifie

$$ad_z([x, y]) = [ad_z(x), y] + [x, ad_z(y)].$$

Puisque cette relation rappelle la règle de Leibniz, on dit que ad_z est une *dérivation*. Note : l'action ad d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur elle-même est la version infinitésimale de l'action Ad du groupe G sur $\mathfrak{g}$ introduite à l'exercice 9. Cette remarque et l'exercice 11 montrent que le choix de $\mathbf{g}$ sur le groupe $SU(2)$ est « naturel ».

9 Une courte conclusion

L'exemple du groupe $SU(2)$ est très riche. D'une part, quoique limité à l'étude des surfaces dans $\mathbb{R}^3$, le premier cours de géométrie différentielle a introduit de nombreux concepts géométriques dont la généralisation est assez aisée. D'autre part, il permet de faire réaliser (une fois de plus ?) que la rencontre de deux chapitres des mathématiques est souvent féconde ; ici les structures algébriques et géométriques permettent de définir un objet aux propriétés remarquables : le groupe $SU(2)$ est une surface possédant une première forme fondamentale avec une riche famille d'isométries, le calcul de ses géodésiques est relativement aisé et toutes ses courbures sectionnelles sont identiques.

Dans cet exemple, nous avons profité de la possibilité de donner un paramétrage (la fameuse fonction $\mathbf{y}$) qui soit simple et propice aux calculs des objets géométriques clés : la première forme fondamentale, les symboles de Christoffel et les géodésiques. Quoiqu'un tel paramétrage n'est pas trop difficile à définir pour les autres *groupes de Lie*, tels les groupes orthogonaux $SO(n)$, les unitaires $SU(n)$ et les symplectiques $Sp(n)$ avec $n \geq 2$, la généralisation des résultats suit habituellement un chemin plus abstrait. L'avantage est alors que ce chemin prépare non seulement à la preuve de propriétés semblables (l'identification du groupe d'isométries de ces autres groupes, de toutes les géodésiques comme translatés des groupes à un paramètre et de la constance des courbures sectionnelles), mais aussi à l'étude de variétés (des « surfaces » plus abstraites) qui sont obtenues comme quotient des groupes en question. La notion de quotient est habituellement introduite en théorie des groupes ; c'est cette même notion qui est utilisée pour introduire les *variétés riemaniennes symétriques* qui partagent aussi plusieurs propriétés géométriques des groupes de Lie.