

MAT 1000 : exercices sans solution 4

1. Montrer que l'intersection d'un nombre arbitraire d'ensembles compacts est compacte.

2. Montrer que si $C \in \mathbb{R}$ est compact et non vide, alors $\sup C$ et $\inf C$ existent et appartiennent à C .

3. Soit C compact et F fermé.

(a) Montrer que $C \cap F$ et $\overline{C \cap F}$ sont compacts.

(b) Trouver C et F satisfaisant les hypothèses tels que $\overline{F^c \cup C^c}$ et $C \setminus F$ soient non compacts.

4. Utiliser les idées sous-jacentes aux preuves des théorèmes de Heine-Borel et de Bolzano-Weierstrass pour montrer l'énoncé suivant : si E est un ensemble infini borné, alors il contient un sous-ensemble d'éléments $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tel que

$$e_1 < e_2 < \dots < e_n < \dots \quad \text{ou} \quad e_1 > e_2 > \dots > e_n > \dots$$

5. Soient C et D deux ensembles compacts non vides. La distance entre C et D est le nombre

$$d = \inf\{|x - y| : x \in C \text{ et } y \in D\}.$$

(a) Montrer que d est un nombre réel.

(b)* Montrer que, si C et D sont disjoints, alors $d > 0$ et qu'il existe un $c_0 \in C$ et un $d_0 \in D$ tel que $d = |c_0 - d_0|$.

* dénote un exercice plus difficile.