

## MAT 1000 : exercices sans solution 3

---

1. Montrer que, si  $x \in (-\infty, a)$ , il existe  $y \in (-\infty, a)$  tel que  $x < y$ .

---

2. Soient  $A$  et  $B \subset \mathbb{R}$  deux ensembles non vides tels que  $x \leq y$  pour tout  $x \in A$  et  $y \in B$ .

(a) Montrer que  $\sup A \leq y$  pour  $y \in B$ .

(b) Montrer que  $\sup A \leq \inf B$ .

---

3. Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles non vides de  $\mathbb{R}$  et soit  $A + B$  l'ensemble défini par

$$\{a + b \mid a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Ainsi  $A + B$  est l'ensemble de toutes les sommes d'un élément de  $A$  avec un élément de  $B$ . Montrer que  $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ .

Note : il arrive souvent en mathématiques que, pour prouver l'égalité de deux nombres  $a$  et  $b$ , on montre séparément que  $a \leq b$  puis que  $b \leq a$ . Dans le cas de l'exercice,  $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$  est assez facile. (Pourquoi?) Pour montrer  $\sup A + \sup B \leq \sup(A + B)$ , montrer d'abord que pour tout nombre  $\epsilon > 0$ , il existe  $x \in A$  et  $y \in B$  tel que  $\sup A - \epsilon < x$  et  $\sup B - \epsilon < y$ .

---

4. Déterminer les points intérieurs et d'accumulation des ensembles suivants.

(a)  $E = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n + 1) = \dots \cup (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup \dots$

(b)  $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) = \dots \cup (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ .

---

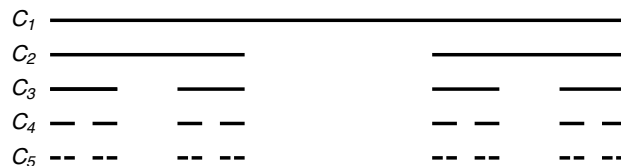
5. Exercice # 4, p. 45 du manuel.

---

6. Exercice # 6, p. 45 du manuel.

---

7. Pour ceux qui aiment aller plus loin. Certains sous-ensembles de  $\mathbb{R}$  ont mené les mathématiciens à donner des définitions topologiques précises. L'ensemble de Cantor est un de ceux-ci. Il est obtenu par un processus répété. La première étape commence avec l'ensemble  $C_1 = [0, 1]$ . Pour l'étape suivante, on retire de  $C_1$  l'intervalle ouvert  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  et donc  $C_2 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ . À chaque étape, on retire de  $C_i$  les intervalles ouverts (de largeur  $1/3^{i+1}$ ) au centre de chacun des intervalles fermés qui constituent  $C_i$ . Voici le résultat pour les cinq premières étapes.



L'ensemble de Cantor est l'ensemble  $C_\infty$  obtenu en répétant ce processus un nombre infini de fois. Cet ensemble  $C_\infty$  est non vide, puisqu'il contient les nombres 0 et 1. Est-il ouvert (facile)? est-il fermé (plus difficile!)?

---