Résumé

Vous trouverez ci-dessous les solutions d'une sélection d'exercices du TP2 du cours MAT1000, soit les exercices : p. 35 #1 et 2 pour (j), (l) et p. 45 #5.

Exercices : p. 35 #1 et 2 pour (j), (l) . Trouver l'ensemble des points d'accumulation pour les ensembles suivants :

(j) $E = \{x \in \mathbb{R} : x \in [1,2] \cup \{3\}\}$;

(l) $E = [0,1] \cup \{3\}$

Solution : Notons l'ensemble des points d'accumulation de E par E' :

#1 (j) Commençons par vérifier si les points de E sont dans E'. D'abord, pour tout $x_0 \in [1,2]$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$V'(x_0, \delta) \cap E \neq \emptyset$$

ainsi, $[1,2] \subset E'$. Ensuite, nous remarquons que le voisinage épointé de $x = 3$ de rayon $\delta = \frac{1}{2}$ n'intersecte pas E

$$\begin{aligned} V'(3, 1/2) \cap E &= \left[(3 - \frac{1}{2}, 3 + \frac{1}{2}) \setminus \{3\}\right] \cap \left[\{[1,2] \cup \{3\}\}\right] \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

ainsi puisqu'il existe un $\delta > 0$ tel que $V'(3, \delta) \cap E = \emptyset$, alors $3 \notin E'$.

Continuons avec les points qui ne sont pas dans E, et vérifions s'ils sont dans l'ensemble E'. Soit $x \in \mathbb{R}$:

— Si $x < 1$, alors pour le rayon $\delta_1 = 1 - x > 0$, l'intersection est vide : $V'(x, \delta_1) \cap E = \emptyset$. Ainsi, $(-\infty, 1) \not\subset E'$;

— Si $2 < x < 3$, alors pour le rayon $\delta_2 = \min\{x - 2, 3 - x\}$, le voisinage épointé $V'(x, \delta_2)$ n'intersectera pas E. Ainsi $(2,3) \not\subset E'$;

— Si $x > 3$, alors pour le rayon $\delta_3 = x - 3 > 0$, l'intersection est vide : $V'(x, \delta_3) \cap E = \emptyset$. Ainsi $(3, \infty) \not\subset E'$.

Notez que les cas ci-haut peuvent être regroupés et simplifés à l'affirmation suivante : pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus E$, si $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, alors $V'(x, \delta) \cap E = \emptyset$. Avec tout cela, nous concluons que

$$\boxed{E' = [1,2]}$$

#1 (l) La démarche est la même qu'au numéro précédent, sauf que l'ensemble considéré est maintenant $E = [0,1] \cup \{3\}$ plutôt que $E = [1,2] \cup \{3\}$. Nous obtenons que

$$\boxed{E' = [0,1]}$$

#2 (l), (j) Par définition, E est fermé si $E' \subset E$. Puisque c'est le cas pour les deux, nous concluons qu'ils sont tous deux fermés.

Exercice : p. 45 #5 . Montrer que $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$. La relation $int(A \cup B) = int(A) \cup int(B)$ est-elle vraie ?

Démonstration. Pour montrer une égalité entre deux ensembles, il faut montrer la double inclusion, qu'à la fois $int(A \cap B) \subset int(A) \cap int(B)$ et $int(A \cap B) \supset int(A) \cap int(B)$.

Étape 1 Commençons en montrant que $int(A \cap B) \subset int(A) \cap int(B)$.

Soit $x \in int(A \cap B)$ alors cela nous dit que $x \in A \cap B$, donc $x \in A$ et $x \in B$ et qu'il existe un voisinage de x de rayon $r_1 > 0$ tel que $V(x, r_1) \subset A \cap B$. Ce voisinage étant dans l'intersection, nous avons à la fois $V(x, r_1) \subset A$ et $V(x, r_1) \subset B$, donc, $x \in int(A)$ et $x \in int(B)$. Ainsi, $x \in int(A) \cap int(B)$ pour $x \in int(A \cap B)$, ou en d'autres mots

$$int(A \cap B) \subset int(A) \cap int(B) \tag{1}$$

Étape 2 Montrons que $int(A) \cap int(B) \subset int(A \cap B)$. Si $x \in int(A) \cap int(B)$, alors $x \in int(A)$ et $x \in int(B)$ et nous avons à la fois :

- Puisque $int(E) \subset E$ pour tout ensemble E, alors $x \in A$ et $x \in B$, donc $x \in A \cap B$;
- Il existe un voisinage $V(x, r_2)$ de x de rayon $r_2 > 0$ tel que $V(x, r_2) \subset A$, et un autre voisinage $V(x, r_3)$ de rayon $r_3 > 0$ tel que $V(x, r_3) \subset B$.

En prenant $r = \min\{r_2, r_3\}$, alors $V(x, r) \subset A$ et $V(x, r) \subset B$ donc $V(x, r) \subset A \cap B$. Ajoutons à cela que $x \in A \cap B$ et nous avons montré que pour tout $x \in int(A) \cap int(B)$, $x \in int(A \cap B)$. En d'autres mots

$$int(A \cap B) \supset int(A) \cap int(B) \tag{2}$$

et avec (1) et (2), nous concluons que

$$\boxed{int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)}$$

□

Deuxième partie de la question : La relation $int(A \cup B) = int(A) \cup int(B)$ n'est pas vraie. Prenons par exemple $A = (0, 1]$ et $B = [1, 2)$. Nous avons $A \cup B = (0, 2)$, d'intérieur $int(A \cup B) = (0, 2)$. Ensuite, $int(A) = (0, 1)$ et $int(B) = (1, 2)$, alors $int(A) \cup int(B) = (0, 2) \setminus \{1\}$. Ainsi

$$int(A \cup B) \neq int(A) \cup int(B)$$