

MAT 1000 : exercices sans solution 2

1. Calculer le supremum et l'infimum de chacun des sous-ensembles de \mathbb{R} suivants.

(a) $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$

(b) $B = \{1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \dots\}$

(c) $C = \{x \mid x^2 + x - 1 < 0\}$

(d) $D = \left\{ \frac{m+n\sqrt{2}}{m+n\sqrt{3}} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$.

2. Soient A et B deux sous-ensembles bornés de \mathbb{R} .

(a) Montrer que $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$. (Est-ce que « $<$ » est possible?)

(b) Trouver une inégalité ou une égalité semblable pour $\sup(A \cup B)$ et la montrer.

3. Montrer que, si $\sup A < \sup B$, alors il existe un élément b de B qui majore A.

4. Montrer que E est borné si et seulement si il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in E$, $|x| \leq c$.

5. Théorème : Deux nombres réels a et b sont égaux si et seulement si $|a - b| < \epsilon$ pour tout nombre réel $\epsilon > 0$.

Rappel sur les mots « si et seulement si » qui sont utilisés dans les énoncés de # 4 et # 5. Ils veulent dire, par exemple pour ce dernier numéro, que les deux implications suivantes sont vraies :

(i) si a et b sont égaux, alors $|a - b| < \epsilon$ pour tout nombre réel $\epsilon > 0$.

(ii) Si $|a - b| < \epsilon$ pour tout nombre réel $\epsilon > 0$, alors a et b sont égaux.

Ainsi cet exercice consiste à montrer ces deux énoncés (i) et (ii). De la même façon il y a deux énoncés à l'exercice # 4.
