Formulaire de pratique

Université de Montréal, mat1000

Question 1 (ss8.1)**.** Montrez que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est uniformément continue sur son domaine.

Question 2 (ss8.6)**.** Soit $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ continue telle que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

(i) Est-ce vrai que f est majorée et atteint son maximum ? Justifiez.

(ii) Est-ce vrai que f est minorée et atteint son minimum ? Justifiez.

Question 3 (ss10.8a)**.** Calculez la valeur de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}.$$

Question 4 (ss11.6)**.**

1. Montrez que, si $\sum a_n$ converge absolument, alors $\sum a_n^2$ converge absolument.
2. Est-il vrai que, si $\sum a_n$ converge, alors $\sum a_n^2$ converge ?

Question 5 (ss12.1b)**.** Montrez que, si $\sum a_n^2$ converge, alors $\sum \frac{a_n}{n^\alpha}$ converge pour tout $\alpha > 1/2$.

Question 6 (ss12.4)**.** Déterminez pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$$

converge.

Question 7. Soit $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable, avec deuxième dérivée continue. Supposons qu'il existe M_1, M_2 tels que pour tout $x > 0$, on ait

$$|f(x)| \leq M_1 \quad \text{et} \quad |f''(x)| \leq M_2.$$

(i) Montrez que pour tout $x > 0$,

$$|f'(x)| \leq \frac{2M_1}{h} + \frac{hM_2}{2}$$

pour tout $h > 0$.

(ii) Montrez maintenant que

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_1 M_2}.$$

Question 8. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois continûment dérivable telle que

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \forall x, f''(x) > 0.$$

Montrez que f atteint un unique minimum.