

- (4) 1. (a) Montrer que la fonction  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par  $p(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = (x-1)(x^2 - 2x + 4)$  possède une fonction réciproque  $p^{-1}$  dont le domaine est tout  $\mathbb{R}$ .
- (3) (b) Donner la forme générale de la dérivée de la réciproque  $f^{-1}$  d'une fonction  $f$  quelconque en termes de la dérivée de  $f$  si  $f$  est dérivable et strictement croissante sur tout son domaine.
- (3) (c) Calculer la dérivée  $(p^{-1})'(0)$  pour le polynôme  $p$  en (a).

@ Puisque  $p$  est continu, il suffit de montrer que  $p$  est strictement (de) croissante. Ceci peut être fait en calculant sa dérivée :

$$p'(x) = 3x^2 - 6x + 6 = 3(x^2 - 2x + 2)$$

dont les zéros

$$\frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{4-8}) \text{ ne sont pas réels.}$$

Donc, puisque  $p'(0) = 6$ ,  $p'(x)$  est toujours positive et  $p$  est strictement croissante.

Puisque son degré est impair,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$  et l'image de  $f$  est tout  $\mathbb{R}$ .

Ainsi le domaine de  $f^{-1}$  est tout  $\mathbb{R}$ .

(b) Puisque  $f$  est strict. croissante,  $f^{-1}$  existe partout sur  $\text{im} f$ . Puisque  $f$  est dérivable,  $f^{-1}$  est aussi dérivable et

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{si } f'(x) \neq 0, \text{ ce qui est le cas}$$

puisque  $f$  est strictement croissante.

(c) Il faut trouver  $x$  tel que  $f(x) = 0$ . La ~~triviale~~ factorisation donnée montre que  $p(x=1) = 0$ . C'est le seul zéro de  $p$  puisque  $p$  est strictement croissant. Donc

$$(p^{-1})'(0) = \frac{1}{p'(1)} = \frac{1}{3(x^2 - 2x + 2)|_{x=1}} = \frac{1}{3}.$$

Poursuivre votre solution à la prochaine page →

- (10) 2. Soit  $f : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable sur tout son domaine et soit  $\{x_n\}$  (avec  $x_n \in V'(0, a)$ ) une suite convergente vers 0. Montrer que, si  $f(x_n) = 0$  pour tout  $n$ , alors  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 0$ .

Puisque  $f$  est différentiable sur son domaine, elle y est continue.

Ceci assure que, toute suite  $\{x_n\}$  telle que  $x_n \rightarrow x_0$  avec  $x_n \in V'(x_0, \delta) \cap D$  pour un certain  $\delta > 0$  convergera vers  $f(x_0)$ .

Donc

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

Considérons maintenant la fonction  $F : \overbrace{(-a, 0) \cup (0, a)}^{D_F} \rightarrow \mathbb{R}$

donnée par

$$F(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}.$$

Elle est continue sur son domaine  $D_F$  et 0 est un pt. d'accumulation de  $D_F$ . Alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = L \iff \text{toute suite } \{x_n\} \text{ avec } x_n \in D_F \text{ et } x_n \rightarrow x_0 \text{ sera telle que } F(x_n) \rightarrow L.$$

Ainsi

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0.$$