(10) **1.** Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dire si f est continue en $x = -1$ puis en $x = +1$. Justifier rigoureusement.

- f n'est pas continue en $x=-1$. En effet, par la densité des rationnels il existe une suite $x_n \to -1$ avec $x_n \in \mathbb{Q}$. Alors $f(x_n) = x_n \to -1$. Mais, par la densité des irrationnels, il existe une suite $y_n \to -1$ avec $y_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Alors $f(x_n) = x_n^2 \to (-1)^2 = +1$. Donc puisque deux sous-suites convergeant vers -1 amènent à $1 = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) \neq -1 = \lim_{n \to +\infty} f(y_n)$, la fct f n'est pas continue en -1.

- f est continue en $x = +1$. En effet, x et x^2 sont des fcts continues. Donc, $\forall \epsilon > 0$,

  $\exists \delta_1 > 0$ telle que, si $|x-1| < \delta_1$ alors $|x - 1| < \epsilon$

  et $\exists \delta_2 > 0$ " , si $|x-1| < \delta_2$ alors $|x^2 - 1^2| < \epsilon$.

  Soit $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Alors, si $|x-1| < \delta$, alors

$$|f(x) - f(1)| = \left.\begin{cases} |x-1| & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ |x^2-1| & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}\right\} < \epsilon$$

  car le δ a été choisi pour que $|x-1|$ et $|x^2-1| < \epsilon$. Donc f est continue en $x = +1$.

(10) 2. Trouver un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que le polynôme $x^5 + 4x^2 - 4x + 1$ s'annule en un point de l'intervalle $[n, n+1)$ et énoncer le théorème qui vous permet d'obtenir ce résultat.

On sait par le thm. des valeurs intermédiaires (énoncé plus bas) que, puisqu'un polynôme est une fonction continue, alors le polynôme aura une racine dans l'intervalle $(n, n+1) \subset [n, n+1]$ si les évaluations du polynôme en n et en $n+1$ sont de signes différents.

Voici les premières évaluations :

n	-2	-1	0	1	2
$p(n)$	-7	8	1	2	41

(Pour être rapide, puisque $p(0) = 1$, il était avantageux de chercher parmi les n négatifs.) Donc $n = -2$ est un n possible : il y aura une racine du polynôme dans $[-2, -1)$.

Le thm des valeurs intermédiaires dit :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue avec $f(a) \neq f(b)$. Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$ entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un $x \in (a, b)$ tel que $f(x) = y$.