

- (8) 1. (a) Soient A et B deux sous-ensembles non vides bornés de \mathbb{R} . Montrer que, si il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $a < c < b$ pour tout $a \in A$ et $b \in B$, alors $\sup A \leq \inf B$.
- (2) (b) Donner un exemple d'une paire de A et B satisfaisant les hypothèses de (a) et telle que $\sup A = \inf B$.

Ⓐ Le nombre $c \in \mathbb{R}$ est donc, par hypothèse une borne supérieure de A et inférieure de B . Par l'axiome de complétude, $\sup A$ et $\inf B$ existent et, de plus :

$$\sup A \leq c \leq \inf B$$

qui est ce qu'il fallait montrer.

Ⓑ Soit $A = (0, 1)$ et $B = (1, 2)$. On a montré au cours que $\sup A = 1 = \inf B$. Notons que, tel que désiré :

$$a < 1 = c < b, \quad \forall a \in A \text{ et } b \in B.$$

(10) 2. Montrer que $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ n'est pas un ensemble ouvert.

L'ensemble $E = (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ ne sera pas ouvert si un de ses éléments n'est pas intérieur. C'est le cas, par exemple avec $e = \frac{1}{2}$ qui est un nombre rationnel et $e \in (0, 1)$.

Ce point n'est pas intérieur puisque, quelque soit $\delta > 0$, le voisinage $V(\frac{1}{2}, \delta)$ contiendra des nombres irrationnels (densité des nombres irrationnels appliquée à l'intervalle $(\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta)$). Ainsi, pour tout δ :

$$V(\frac{1}{2}, \delta) \not\subset E.$$

Donc $\frac{1}{2}$ n'est pas intérieur et E n'est pas ouvert.