(9) 1. Montrer que $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$.

Il suffit de montrer que $\min\{\sup A, \sup B\}$ est une borne supérieure de $A \cap B$. Et pour cela il suffit de montrer que $\sup A$ et $\sup B$ sont les deux des bornes supérieures de $A \cap B$.

$\sup A$ est une borne supérieure de $A \cap B$ puisque tout élément dans $A \cap B$ est un élément de A et donc $x \in A \cap B$ implique $x \leq \sup A$. Cet argument peut être répété pour $\sup B$, ce qui termine la preuve.

(9) **2.** L'ensemble $C = \{-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ est-il compact, oui ou non? Justifier rigoureusement.

OUI l'ensemble C est compact. En effet

C est borné : l'élément maximal de C est et son élément minimal est -1. Donc $-1 \le c \le +1$ pour tout $c \in C$.

C est fermé : pour le montrer, il suffit de montrer que C^c est ouvert. Or C^c est la réunion des ouverts suivants:

$$(-\infty,-1) \cup (-1,-\tfrac{1}{2}) \cup (-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{3}) \cup \dots \cup (-\tfrac{1}{n},-\tfrac{1}{n+1}) \cup \dots$$
$$\cup \dots \cup (\tfrac{1}{n+1},\tfrac{1}{n}) \cup \dots \cup (\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}) \cup (\tfrac{1}{2},1) \cup (1,+\infty)$$

ou plus simplement

$$C^c = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \cup \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-\tfrac{1}{n},-\tfrac{1}{n+1})\Big)$$
$$\cup \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\tfrac{1}{n+1},\tfrac{1}{n})\Big)$$

Puisque l'union d'un nombre arbitraire d'ouverts est ouverte, C^c est ouvert et C est donc fermé.

(9) **3.** Soit $a > 1$. Calculer la limite de $\left\{\frac{a^n+(-1)^n}{a^{n+1}+(-1)^{n+1}}\right\}$ en énonçant les théorèmes utilisés.

$$x_n = \frac{a^n + (-1)^n}{a^{n+1} + (-1)^{n+1}} = \frac{1 + \frac{(-1)^n}{a^n}}{a + \frac{(-1)^{n+1}}{a^n}}$$

car $a \neq 0$

Or, lorsque $a>1$, on a $a^n \to +\infty$ et, puisque

$$|a|^n \to +\infty \Leftrightarrow \frac{1}{a^n} \to 0$$

on a que

$$\frac{(-1)^n}{a^n} \text{ et } \frac{(-1)^{n+1}}{a^n} \to 0.$$

La limite d'une somme de suites est la somme de leurs limites

$$1 + \frac{(-1)^n}{a^n} \to 1 \text{ et } a + \frac{(-1)^{n+1}}{a^n} \to a$$

et la limite d'un quotient de suites est le quotient des limites (si la limite de la suite du dénominateur $\neq 0$).

Donc

$$\frac{a^n + (-1)^n}{a^{n+1} + (-1)^{n+1}} \longrightarrow \frac{1}{a}.$$

(9) **4.** Soit $\{a_n\}$ une suite convergeant vers a. Supposons de plus que cette suite possède une sous-suite $\{a_{n_k}\}$ telle que $(-1)^k a_{n_k} > 0$. Montrer que $a = 0$.

La sous-suite $\{a_{n_k}\}$ est donc telle que

$a_{n_k} > 0$ si k est pair et

$a_{n_k} < 0$ si k est impair.

Supposons que $a \neq 0$ et, sans perte de généralité, que $a > 0$. Alors, pour $\epsilon = a > 0$, la condition $|a_{n_k} - a| < \epsilon = a$ signifie que $a_{n_k} \in (0, 2a)$. Donc il n'existera pas de N tel que, si $k > N$, $|a_{n_k} - a| < a$ puisque les a_{n_k} avec k impair sont négatifs. Mais a_n converge (et toutes ses sous-suites aussi) vers a et l'hypothèse que $a \neq 0$ doit être rejetée. Ainsi $a = 0$.