(8) 1. Soit $\sum_n a_n$ une série absolument convergente et $\{b_n\}$ une suite bornée. Montrer que $\sum_n a_n b_n$ converge absolument.

Soit $M>0$ tel que $|b_n| < M$ pour tout n. Alors

$$|a_n b_n| < M |a_n|$$

et, par le critère de comparaison, la série $\Sigma a_n b_n$ converge absolument.

(6) 2. (a) Soit la fonction $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Montrer que son développement de Taylor d'ordre 3 autour de $a = 0$ est

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + R$$

où R dénote le reste de Lagrange.

À l'ordre 3 autour de $a=0$, la formule de Taylor se lit

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \underbrace{\frac{f'''(c)}{3!}x^3}_{=R} .$$

(pour un $c \in [0,x]$) si $x>0$.

Il suffit donc de calculer les deux premières dérivées.

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{1-0}} = 1$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\frac{-1}{(1-x)^{3/2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^{3/2}} \quad \text{et} \quad f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(-3)}{2}\cdot\frac{-1}{(1-x)^{5/2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^{5/2}} \quad \text{et} \quad f''(0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} .$$

Le développement est donc

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{3}{4}x^2 + R$$

tel qu'annoncé.

(4) **(b)** Écrire le reste de Lagrange R général et le borner par une puissance de 10 lorsque la formule de Taylor est utilisée en $x = \frac{1}{2}$.

Le terme général fera apparaître la 3e dérivée.

$$f'''(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\,\frac{1}{(1-x)^{7/2}}$$

et

$$R = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2}\cdot\frac{1}{3!}\,\frac{1}{(1-c)^{7/2}}\cdot x^3$$

pour un $c \in (0,x)$ si $x>0$,
ou $c \in (x,0)$ si $x<0$.

Si $x = \frac{1}{2}$, la borne supérieure de $\frac{1}{(1-c)^{7/2}}$ est simplement $\frac{1}{(1/2)^{7/2}}$ et

donc

$$|R| = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2}\cdot\frac{1}{6}\,\frac{1}{\cancel{(1/2)^3}(1/2)^{1/2}}\cdot\frac{1}{\cancel{2^3}}$$

$$= \frac{1\cdot\cancel{3}\cdot 5}{2\cdot 2.2}\cdot\frac{1}{2\cdot\cancel{3}}\sqrt{2} < \frac{5\times 1.5}{16} = \frac{7.5}{16} < \frac{1}{2} < 10^0 \quad [(\sqrt{2} \approx 1.414 < 1.5$$

Donc le terme d'erreur de Lagrange est borné par

$$|R| < 10^0.$$

(8) 3. Soient f et g deux fonctions continues sur leur domaine commun $[a, b]$. Si $f(a) < g(a)$ et $f(b) > g(b)$, montrer qu'il existe un point $x_0 \in (0, 1)$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Si D est le domaine commun, définissons

$$h : D = [a, b] \to \mathbb{R} \quad \text{par}$$
$$x \mapsto f(x) - g(x).$$

Alors h est continue et

$$\left.\begin{array}{l} h(a) = f(a) - g(a) < 0 \\ \text{et} \quad h(b) = f(b) - g(b) > 0 \end{array}\right\} \text{par hypothèse.}$$

Par le thm. des valeurs intermédiaires, il existe donc $c \in (a, b)$ tel que $h(c) = 0$, c'est-à-dire

$$h(c) = f(c) - g(c) = 0 \quad \text{ou} \quad f(c) = g(c).$$

(5) **4. (a)** Montrer que

$$f(x) = \begin{cases} x^4, & x \le 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases}$$

est dérivable en 0.

(5) **(b)** Trouver le plus grand $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(0)$ existe.

ⓐ Etudions $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

Si $x>0$, alors $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{0}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

Si $x \le 0$, alors $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x^4}{x} = x^3$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

La coïncidence des limites à gauche et à droite implique l'existence de la limite quand $x \to 0$ et

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$$

ⓑ La question ⓐ démontre donc que

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3, & x \le 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

De la même façon

$$f''(x) = \begin{cases} 12x^2, & x \le 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f''(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f''(x)$ et

la fct. est dérivable deux fois en $x=0$. De la même façon,

$$f'''(x) = \begin{cases} 24x, & x \le 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$ et la dérivée $f'''(0)$ existe et est $=$ à 0.

Enfin

$$f^{(4)}(x) = \begin{cases} 24, & x \le 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$ et clairement les limites à gauche et à droite ne coïncident pas et $f^{(4)}(x)$ n'existe pas en 0. Donc le n cherché est $n=3$.

(5) **5. (a)** Dire si la série suivante converge :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n - \log n}{10n^2 + n^3}}.$$

Intuition : lorsque n est grand, les termes dominants au numérateur et dénominateur sont n et n^3 et alors $\sqrt{\frac{n-\log n}{10n^2+n^3}}$ est proche de $\sqrt{\frac{n}{n^3}} = \frac{1}{n}$.

Solution rigoureuse : on utilise le critère du quotient avec $a_n = \sqrt{\frac{n-\log n}{10n^2+n^3}}$ et $b_n = \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1/n} \sqrt{\frac{n-\log n}{10n^2+n^3}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{continuité} \\ \text{de } \sqrt{\cdot}}}{=} \sqrt{\lim_{n\to\infty} n^2 \, \frac{n-\log n}{10n^2+n^3}}$$

$$= \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{\log n}{n^3}}{1 + \frac{10}{n}}} = \sqrt{1} = 1$$

Donc 1 est distinct de 0 et ∞ et $\sum \sqrt{\frac{n-\log n}{10n^2+n^3}}$ est de même nature que $\sum \frac{1}{n}$ qui diverge.

(5) **(b) Même question pour**

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \log\frac{n}{n+1}$$

* Puisque $\log\frac{n}{n+1} = -\log\frac{n+1}{n} = -\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$, on a que

$$\log\frac{n}{n+1} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

* Le terme $a_n = \log\frac{n}{n+1}$ est toujours négatif puisque $\frac{n}{n+1} < 1$.
Pour utiliser le critère de Leibniz sur les séries alternées, étudions plutôt $b_n = \log\frac{n+1}{n}$ et donc $b_n = -a_n$.
Alors $b_n > 0$ et $\{b_n\}$ est une suite décroissante puisque

$$\frac{d}{dx}\log\frac{x+1}{x} = \frac{d}{dx}(\log x+1 - \log x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x+1)}{x(x+1)}$$

$$= -\frac{1}{x(x+1)} < 0$$

qui est tjrs négatif lorsque x (ou n) ≥ 1. Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \log\frac{n}{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$$

où $\{b_n\}$ est une suite positive, décroissante et qui tend vers zéro.

Le critère de Leibniz permet de conclure que cette série alternée converge.