MAT 1000 Analyse 1

Professeur : Yvan Saint-Aubin

Intra : 12 décembre 2019, 9h00–11h50

DIRECTIVES PÉDAGOGIQUES :

- Répondre à toutes les questions.
- Toutes les réponses doivent être justifiées rigoureusement.
- Aucune documentation permise.
- Pas de calculatrice.
- L'intra est sur 46.
- NE PAS DÉTACHER LES FEUILLES DU QUESTIONNAIRE.
- NE PAS ÉCRIRE DANS LA PLAGE AU-DESSUS DES QUESTIONS ; ÉCRIRE VOS RÉPONSES DANS LES BOÎTES À CET EFFET.

Nom, prénom

Matricule

Courriel

(8) **1.** Soit $\sum_n a_n$ une série absolument convergente et $\{b_n\}$ une suite bornée. Montrer que $\sum_n a_n b_n$ converge absolument.

(6) **2. (a)** Soit la fonction $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Montrer que son développement de Taylor d'ordre 3 autour de $a = 0$ est

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + R$$

où R dénote le reste de Lagrange.

(4) **(b)** Écrire le reste de Lagrange R général pour le développement en **(a)** et le borner par une puissance de 10 lorsque la formule de Taylor est utilisée en $x = \frac{1}{2}$.

(8) **3.** Soient f et g deux fonctions continues sur leur domaine commun $[a, b]$. Si $f(a) < g(a)$ et $f(b) > g(b)$, montrer qu'il existe un point $x_0 \in (a, b)$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

(5) **4. (a)** Montrer que

$$f(x) = \begin{cases} x^4, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases}$$

est dérivable en 0.

(5) **(b)** Trouver le plus grand $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(0)$ existe.

(5) **5. (a)** Dire si la série suivante converge :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n - \log n}{10n^2 + n^3}}.$$

(5) **(b)** Même question pour

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log \frac{n}{n+1}.$$

CETTE PAGE NE SERA PAS CORRIGÉE.
L'UTILISER COMME BROUILLON.

CETTE PAGE NE SERA PAS CORRIGÉE.
L'UTILISER COMME BROUILLON.

CETTE PAGE NE SERA PAS CORRIGÉE.
L'UTILISER COMME BROUILLON.