(10) **1.** Soit (a_n) une suite telle $a_n \neq 0$ pour tout n et $|a_n| \to +\infty$. Montrer que $\frac{1}{a_n} \to 0$.
Attention : une proposition montrée en classe énonce que, si $x_n \to x$ et $y_n \to y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et $y \neq 0$, alors $x_n/y_n \to x/y$. Le résultat semblable avec $y_n \to +\infty$ n'a pas été démontré et ne peut donc pas être utilisé à moins de le prouver.

Soit $\epsilon > 0$. On doit trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left|\frac{1}{a_m} - 0\right| = \left|\frac{1}{a_m}\right| < \epsilon \qquad \text{si} \quad m > N$$

ou encore $$\frac{1}{\epsilon} < |a_m|. \qquad (*)$$

Mais, puisque $|a_m| \to +\infty$, pour tout M, et en particulier $M = \frac{1}{\epsilon}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tq $(*)$ soit satisfaite si $m > N$.
Ce N pour $M = \frac{1}{\epsilon}$ est celui qu'on devait trouver.

(10) **2.** Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1.$$

Soit $P(n)$ l'énoncé

$$(1 \cdot 1!) + (2 \cdot 2!) + \ldots + (n \cdot n!) = (n+1)! - 1.$$

Prouvons que $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$. La preuve est par induction.

- $P(1)$ dit $(1 \cdot 1!) \stackrel{?}{=} \underbrace{(1+1)!}_{2!} - 1$
  $= 2! - 1 = 1$ et $P(1)$ est donc vraie.

- Supposons $P(n)$ vraie. Alors

$$[(1 \cdot 1!) + (2 \cdot 2!) + \ldots + (n \cdot n!)] + (n+1) \cdot (n+1)!$$
$$= [(n+1)! - 1] + (n+1) \cdot (n+1)! \quad \text{par l'hypo. d'induction}$$
$$= (n+1)!\,(1 + (n+1)) - 1$$
$$= (n+2)! - 1$$

et $P(n+1)$ est vraie, si $P(n)$ l'est.

Ceci termine la preuve par induction.