(10) **2.** Soit $r > 0$ un nombre réel. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} < r < n$.

Considérons les cas (i) $r \geq 1$ et (ii) $r < 1$ séparément.

(i) Si $r \geq 1$, la propriété d'Archimède assure l'existence de $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$1 \leq r < n$$

Puisque r et $n > 0$, la compatibilité donne

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{r} \leq 1 \leq r < n$$

et donc le n de la propriété d'Archimède vérifie

$$\frac{1}{n} < r < n .$$

(ii) Si $r < 1$, alors $s = \frac{1}{r} > 1$ (puisque $r > 0$). Alors l'argument en (i) donne l'existence d'un $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{1}{n} < s = \frac{1}{r} < n$$

et la compatibilité mène à :

$$r < n \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} < r$$

et donc à nouveau :

$$\frac{1}{n} < r < n .$$

(10) **1.** Soit $r > 0$ un nombre réel et $E \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble non vide. Notons par rE l'ensemble $\{rx \in \mathbb{R} \,:\, x \in E\}$. Montrer que $\sup rE = r \sup E$.

Deux choses à montrer : (i) $r \sup E$ majore rE et (ii) si M majore rE, alors $M \geq r \sup E$.

(i) Puisque $\sup E$ est un majorant de E, on a que

pour tout $x \in E$: $\quad x \leq \sup E$

et donc pour tout $x \in E$: $\quad rx \leq r \sup E \quad$ (ici $r>0$ est utilisé)

et pour tout $y = rx \in rE$: $\quad y \leq r \sup E$.

Donc $r \sup E$ majore rE.

(ii) Soit M un majorant de rE. Alors

$\forall y \in rE$: $\quad y \leq M$

ou encore $\forall x = \frac{y}{r} \in E$: $\quad x = \frac{y}{r} \leq \frac{M}{r}$.

Ainsi $\frac{M}{r}$ majore $\sup E$ et, puisque $\sup E$ est la borne supérieure de E, $\frac{M}{r} \geq \sup E$ ou encore $M \geq r \sup E$.

Donc, si M majore rE, alors $M \geq r \sup E$ et

$r \sup E$ est la borne supérieure de rE.