(8) **1.** Soit $r \in \mathbb{R}$ et $E = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \text{ est un nombre irrationnel et } x < r\}$. Montrer que $\sup E = r$.

Clairement r est un majorant de E.

Pour montrer que c'est la borne supérieure de E, il reste à montrer que, pour tout autre majorant s de E, $s \geq r$. Supposons, au contraire, qu'il existe un majorant $s < r$. Par la densité des irrationnels, il existe $y \in \mathbb{Q}^c$ tel que $s < y < r$. Mais ce y satisfait les deux conditions pour être dans E : être irrationnel et $y < r$. Donc $y \in E$ et s n'est pas un majorant.

Donc r est le plus petit majorant et $\sup E = r$.

(7) **2.** **(a)** Soit (a_n) une suite dont tous les éléments sont dans l'intervalle $(0, 1)$. Montrer que, si $a_n \to a$, alors $a \in [0, 1]$.

(3) **(b)** Construire une telle suite (avec $a_n \in (0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$) qui converge vers un point de la frontière de $[0, 1]$.

ⓐ Il faut donc montrer que, si $a \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, alors ce nombre ne peut pas être la limite de (a_n). Soit $a \in (1, +\infty)$. Alors $a - 1 = \epsilon$ est un nombre positif. De plus, puisque $a_n \in (0,1)$, les éléments $a_n < 1$ et $1 - a_n > 0$. Ainsi

$$|a - a_n| = |\underbrace{(a-1)}_{>0} + \underbrace{(1-a_n)}_{>0}| = (a-1) + (1-a_n)$$ car la valeur absolue d'un nombre >0 est ce nombre.

$$> (a-1) = \epsilon.$$

Donc, quelque soit $N \in \mathbb{N}$, il y aura toujours de $n > N$ tels que
$$|a - a_n| > \epsilon.$$

Donc $a > 1$ ne peut pas être une limite.

On élimine la possibilité $a \in (-\infty, 0)$ en considérant $\epsilon = 0 - a$ et $|a_n - a| = (a_n - 0) + (0 - a)$.

(b) La frontière de $[0,1]$ est
$$\partial([0,1]) = [0,1] \setminus \underbrace{(0,1)}_{\text{intérieur de } [0,1]} = \{0, 1\}.$$

Il faut donc trouver une suite (a_n) avec $a_n \in (0,1)$ qui converge soit vers 0 soit vers 1. La suite
$$\left(a_n = \frac{1}{n}\right) \to 0$$
qui a été étudiée au cours fait ce travail.

(10) **3.** Soit (a_n) et (b_n) deux suites de Cauchy. Montrer que (c_n) donnée par $c_n = |a_n - b_n|$ vérifie la définition de suite de Cauchy.

Soit $\epsilon > 0$. Puisque (a_n) et (b_n) sont des suites de Cauchy, il existe N_1 et $N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

si $m, n > N_1$, alors $|a_m - a_n| < \frac{\epsilon}{2}$

et

si $m, n > N_2$, alors $|b_m - b_n| < \frac{\epsilon}{2}$.

Donc, si $m, n > \max\{N_1, N_2\}$, alors

$$
\begin{aligned}
|c_m - c_n| &\leq |(a_m - b_m) - (a_n - b_n)| && \text{car } ||x| - |y|| \leq |x-y| \\
&= |(a_m - a_n) - (b_m - b_n)| && \text{associativité} \\
&\leq |a_m - a_n| + |b_m - b_n| && \text{inég. du } \Delta \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}
$$

Donc $(c_n = |a_n - b_n|)$ est une suite de Cauchy.

(7) **4.** Obtenir la limite

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} \right)$$

en énonçant les théorèmes utilisés.

La somme $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ (cette égalité a été montrée en classe). Alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n}{n^2} = \frac{1}{2}$$

car la limite du quotient de deux polynômes de même de degré est le rapport des coefficients du terme de plus haut degré.