1. Déterminer si les séries suivantes convergent et justifier.

(5) **(a)**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+\sin(n^3)}{n^3+\sin(n)}.$$

La fonction sin est bornée par 1 : $|\sin x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Donc, si $n \geq 2$

$$n + \sin n^3 \leq n+1 < 2n$$

et

$$n^3 + \sin n \geq n^3 - 1 > n^3 - \frac{n^3}{2} = \frac{n^3}{2}.$$

Ainsi

$$0 < a_n = \frac{n+\sin n^3}{n^3+\sin n} < \frac{2n}{n^3/2} = \frac{4}{n^2} \qquad \text{si } n \geq 2$$

Puisque $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge pour tout $\alpha > 1$, alors le test de comparaison assure la convergence de la série proposée.

(4) **(b)**

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n}{n+1}.$$

Une condition nécessaire pour qu'une série converge est que le terme de la série, ici $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ tende vers 0 quand $n \to +\infty$. Mais ici, la suite (a_n) ne converge même pas puisque

$$a_{2n} = \frac{2n}{2n+1} \longrightarrow 1$$

alors que

$$a_{2n+1} = -\frac{2n+1}{2n+2} \longrightarrow -1 .$$

Cette série ne converge pas.

(9) **2.** Montrer que, si la série positive $\sum a_n$ converge, alors $\sum a_n^2$ converge absolument.

Puisque la série positive Σa_n converge, les termes $a_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_n < 1$. Ainsi

$$0 \leq a_n^2 = |a_n|^2 < a_n \quad \text{pour } n \geq N$$

Alors le test de comparaison permet de conclure que Σa_n^2 converge absolument.

(9) **3.** Soient $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $g(a) = h(a)$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \leq a, \\ h(x), & x > a, \end{cases}$$

est continue.

Si $x < a$, alors pour $\delta = a - x$, tout y dans $|y - x| < \delta$ est tel que $f(y) = g(y)$. Puisque g est continue en x, f est aussi continue en x si $x < a$.

Similairement, si $x > a$, il existe un voisinage de x tel que $f(y) = h(y)$ pour y de ce voisinage. Ainsi $f(x)$ est continue si $x > a$.

Est-ce que f est continue en a ? Soit $\epsilon > 0$.
La continuité de g implique l'existence d'un $\delta_g > 0$ tel que, si $a - \delta_g < x < a$, alors $|f(x) - f(a)| = |g(x) - g(a)| < \epsilon$.
La continuité de h donne un $\delta_d > 0$ tel que si $a < x < a + \delta_d$, alors $|f(x) - f(a)| = |h(x - h(a)| < \epsilon$.
Donc, pour $\delta = \min\{\delta_g, \delta_d\}$, on a

si $|x - a| < \delta$, alors $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Et f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

(9) **4.** Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable telle que $f(0) = f(2\pi)$. Montrer qu'il existe un $c \in (0, \pi)$ tel que $f'(c) = -f'(2\pi - c)$.

Soit $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - f(2\pi - x)$.
Elle est continue et dérivable parce que f et $x \mapsto 2\pi - x$ le sont. De plus

$$g(0) = f(0) - f(2\pi) = 0$$
$$g(\pi) = f(\pi) - f(\pi) = 0$$

et il existe donc $c \in (0, 1)$ tel que

$$0 = \frac{g(\pi) - g(0)}{\pi - 0} = g'(c)$$

Mais

$$g'(x) = f'(x) + f'(2\pi - x)$$

et donc, il existe $c \in (0, 1)$ tel que

$$f'(c) = -f'(2\pi - c).$$

(9) **5.** Soit la fonction $p(x) = x^3 - 3x + r$ où $r \in \mathbb{R}$. Montrer que, quelque soit r, le polynôme p possède au plus une racine dans l'intervalle $[0, 1]$.

La dérivée de p est

$$p'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

Elle s'annulle donc qu'en $x = -1$ et $x = +1$ et est négative sur $(-1, 1)$. La fonction p est donc strictement décroissante sur cet intervalle et il ne peut donc y avoir qu'une seule racine sur l'intervalle $[0, 1] \subset [-1, 1]$.

On peut aussi donner un argument par contradiction. S'il y avait $a, b \in [0, 1]$ tel que $a < b$ et $p(a) = p(b)$, alors le thm de Rolle donnerait l'existence de $c \in (0, 1)$ tel que $p'(c) = 0$. Mais $p'(x) < 0 \quad \forall x \in (0, 1)$.

(9) 6. Montrer que

$$\ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

pour tout $x \in (0, +\infty)$.

Calculons le polynôme de Taylor de degré 0 autour du point x_0. Il se lit

$$\ln x = \underbrace{\ln x_0}_{P_0(x) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x-x_0)^0} + R_0(x)$$

où le reste est

$$R_0(x) = \frac{\ln^{(1)}(c)}{1!}(x-x_0)^1 \quad \text{pour un } c \in (x_0, x) \ (\text{si } x > x_0)$$

Ici la dérivée est simplement $f^{(1)}(c) = \frac{1}{c}$.

Utilisons ce développement en $x = x_0 + 1$. Alors

$$\ln(x_0+1) - \ln x_0 = \frac{1}{c}\underbrace{(x-x_0)}_{((x_0+1)-x_0)} = \frac{1}{c} < \frac{1}{x_0}$$

pour $c \in (x_0, x_0+1)$

Donc

$$\ln x+1 - \ln x < \frac{1}{x} \quad \forall x \in (0, +\infty).$$