MAT 1000 Analyse 1

Professeur : Yvan Saint-Aubin

Intra : 13 décembre 2018, 9h00–11h50

DIRECTIVES PÉDAGOGIQUES :

- RÉPONDRE À **CINQ DES SIX** QUESTIONS.
  INDIQUER, PAR UN TRAIT SUR LA BOÎTE-RÉPONSE,
  LA QUESTION QUI NE SERA PAS CORRIGÉE.
- Toutes les réponses doivent être justifiées rigoureusement.
- Aucune documentation permise.
- Pas de calculatrice.
- L'examen final est sur 45.
- NE PAS ÉCRIRE DANS LA PLAGE AU-DESSUS DES QUESTIONS ;
  ÉCRIRE VOS RÉPONSES DANS LES BOÎTES À CET EFFET.

Nom, prénom ____________________

Matricule ____________________

Courriel ____________________

---

1. Déterminer si les séries suivantes convergent et justifier.

(5) **(a)**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+\sin(n^3)}{n^3+\sin(n)}.$$

(4) **(b)**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}.$$

(9) **2.** Montrer que, si la série positive $\sum a_n$ converge, alors $\sum a_n^2$ converge absolument.

(9) **3.** Soient $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $g(a) = h(a)$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \leq a, \\ h(x), & x > a, \end{cases}$$

est continue.

(9) **4.** Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable telle que $f(0) = f(2\pi)$. Montrer qu'il existe un $c \in (0, \pi)$ tel que $f'(c) = -f'(2\pi - c)$.

(9) **5.** Soit la fonction $p(x) = x^3 - 3x + r$ où $r \in \mathbb{R}$. Montrer que, quelque soit r, le polynôme p possède au plus une racine dans l'intervalle $[0, 1]$.

(9) **6.** Montrer que

$$\ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

pour tout $x \in (0, +\infty)$.

CETTE PAGE NE SERA PAS CORRIGÉE.
L'UTILISER COMME BROUILLON.

CETTE PAGE NE SERA PAS CORRIGÉE.
L'UTILISER COMME BROUILLON.